# 第一章　引　　论

积分方程是数学分析理论的一种重要的研究对象，也是解决力学、数学物理等问题的一种重要工具。本章将介绍积分方程的一些基本概念和解决问题所必需的一些预备知识。

## §1.1　积分方程的分类

积分号下含有未知函数的方程称为**积分方程**。下面这些方程都是积分方程：

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)y(t)dt \quad (a\leqslant s\leqslant b) \tag{1.1}$$

$$f(s)=y(s)-\int_a^b K(s,t)y(t)dt \quad (a\leqslant s\leqslant b) \tag{1.2}$$

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)f(t,y(t))dt \quad (a\leqslant s\leqslant b) \tag{1.3}$$

$$y(s)=\int_a^b K(s,t,y(t))dt \quad (a\leqslant s\leqslant b) \tag{1.4}$$

式中$y(s)$是未知函数，$f(s)$和$K(s,t)$是已知函数，$f(t,u)$和$K(s,t,u)$是关于$u$的非线性函数。

形如(1.1)和(1.2)的方程关于未知函数$y(s)$是线性的，称为**线性积分方程**。而形如(1.3)和(1.4)的方程关于未知函数$y(s)$是非线性的，称为**非线性积分方程**。在本书中，我们只讨论线性积分方程。

形如(1.1)的线性积分方程，其中未知函数只出现在积分号下，我们称为**第一种线性积分方程**。如果未知函数不仅

出现在积分号下而且也出现在方程的其它地方，如方程(1.2)那样，则称为**第二种线性积分方程**。

方程(1.2)中的已知函数$f(s)$叫做**自由项**。当$f(s)\neq 0$时，方程(1.2)称为**非齐次的**。当$f(s)\equiv 0$时，即

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)y(t)dt \qquad (a\leqslant s\leqslant b) \qquad (1.5)$$

这时，称方程(1.5)是方程(1.2)对应的**齐次方程**。

函数$K(s,t)$称为积分方程的**核**，它的性质对于我们以后的讨论是至关重要的。实际上，积分方程的特征是由它的核所决定的。在应用中常见的核是连续函数，当然也有不连续的。以后我们讨论的内容大多数是针对连续核的。

我们要讨论的有下面三种类型的积分方程：

(1) 当$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$时，核$K(s,t)$是连续函数，或者虽然不连续，但是为平方可积函数，即二重Lebesque积分

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 dsdt<\infty \qquad (1.6)$$

存在的函数。这时，方程(1.1)和(1.2)称为**第一种和第二种Fredholm积分方程**。

如果Fredholm积分方程中的核具有这样的性质：当$s<t$时，$K(s,t)\equiv 0$，这时方程(1.1)和(1.2)分别可以写成

$$f(s)=\int_a^s K(s,t)y(t)dt \qquad (a\leqslant s\leqslant b) \qquad (1.7)$$

$$f(s)=y(s)-\int_a^s K(s,t)y(t)dt \qquad (a\leqslant s\leqslant b) \qquad (1.8)$$

它们称为**第一种和第二种Volterra积分方程**。

(2) 如果方程(1.1)和(1.2)中的核为如下形式

$$K(s,t)=\frac{H(s,t)}{|s-t|^\alpha} \qquad \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right) \qquad (1.9)$$

式中$H(s,t)$是有界函数，则方程(1.1)和(1.2)称为**第一种和第二种弱奇性积分方程**.

（3） 核为如下形式

$$K(s,t)=\frac{A(s,t)}{s-t} \tag{1.10}$$

的积分方程称为**奇异积分方程**。其中函数$A(s,t)$对于$s$、$t$的偏导数存在，同时积分$\int_a^b \frac{A(s,t)}{s-t}y(t)dt$的主值存在。

如果积分方程中的未知函数不是定义在实数轴上，而是定义在曲线或$n$维区域($n\geqslant 2$)$\Omega$内，那末积分方程中的积分就应该是在曲线或$n$维区域$\Omega$上的积分，$s$、$t$就是曲线或$n$维区域$\Omega$上的点$M$、$N$。这时，方程(1.1)和(1.2)分别为

$$f(M)=\int_\Omega K(M,N)\ y(N)dN\ \ (M\in\Omega) \tag{1.11}$$

$$f(M)=y(M)-\int_\Omega K(M,N)y(N)dN \quad (M\in\Omega) \tag{1.12}$$

相应地，也有Fredholm积分方程、弱奇性积分方程等。例如，方程

$$y(s)-\int_0^1(s^2+t^2)y(t)dt=s^2$$

是具有连续核的第二种Fredholm积分方程。方程

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)}{\tau-\xi}d\tau$$

是具有Cauchy 核的第一种奇异积分方程。其中$L$是光滑的封闭曲线，$f(\xi)$是在$L$满足 Lipschitz 条件的已知函数，$x(\tau)$是未知函数。

## §1.2　积分方程的导出

力学、数学物理问题常常会导出积分方程，而常微分方程和偏微分方程也可以把初始条件或边界条件统一包含在一个等价的积分方程内。我们来看看几个典型的问题。

（1） 常微分方程问题：首先，我们考察一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y'=f(x,y) \tag{1.13}$$

初始条件是$y(0)=y_0$。如果$f(x,y)$是$x,y$的连续函数，方程(1.13)两端从0到$x$积分，就得到一个积分方程

$$y(x)=y_0+\int_0^x f(t,y(t))dt \tag{1.14}$$

函数$f(x,y)$对$y$一般是非线性的，因此方程(1.14)是非线性积分方程。显然，方程(1.14)的解满足常微分方程(1.13)及其初始条件$y(0)=y_0$。

现在我们再来看具有初始条件$y(0)=y_0$、$y'(0)=y_1$的二阶常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=f(x,y) \tag{1.15}$$

上式两端从0到$x$积分，得到

$$y'=y_1+\int_0^x f(u,y(u))du$$

再积分，就得到积分方程

$$y(x)=y_0+y_1x+\int_0^x dt\int_0^t f(u,y(u))du$$

即

$$y(x)=y_0+y_1x+\int_0^x (x-u)f(u,y(u))du \tag{1.16}$$

显然，积分方程(1.16)的解也是常微分方程(1.15)的满足初始条件的解。因而积分方程(1.16)与常微分方程(1.15)及其初始条件是等价的。

从上面我们知道常微分方程（1.15）的通解$y(x)$都满足积分方程

$$y(x)=A+Bx+\int_0^x (x-u)f(u,y(u))du \quad (1.17)$$

其中$A$、$B$是任意常数，它们可以由初始条件确定也可以由别的条件确定。例如要求满足边界条件$y(0)=\alpha$, $y(l)=\beta$的$y(x)$，则由(1.17)可以得到

$$A=y(0)=\alpha$$

$$A+Bl+\int_0^l (l-u)f(u,y(u))du=y(l)=\beta$$

因此 $A=\alpha$

$$B=\frac{\beta-\alpha}{l}-\frac{1}{l}\int_0^l (l-u)f(u,y(u))du$$

将上两式代入方程(1.17)，就得到常微分方程(1.15)的满足边界条件的解$y(x)$必须满足的积分方程

$$y(x)=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{l}x+\int_0^x (x-u)f(u,y(u))du$$

$$-\frac{x}{l}\int_0^l (l-u)f(u,y(u))du$$

化简得到

$$y(x)=z(x)-\int_0^l K(x,u)f(u,y(u))du \quad (1.18)$$

式中 $z(x)=\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{l}x$

$$K(x,u)=\begin{cases}\dfrac{u(l-x)}{l} & (0\leqslant u\leqslant x)\\[2ex] \dfrac{x(l-u)}{l} & (x\leqslant u\leqslant l)\end{cases}$$

上面的讨论是可以反推回去的。因此，积分方程(1.18)等价于常微分方程(1.15)及其边界条件。

（2） 质点力学问题：Abel研究过这样一个力学问题。一个质点沿铅直平面上一光滑曲线自由下降，试求这样的曲线：使得质点达到最低点时所需的时间为质点开始下滑时的高 $h$ 的一个已知函数 $f(h)$。

我们先建立坐标系（见图1—1）。设质点开始下滑位置为 $P(x,h)$，经过 $t$ 秒，下滑到 $Q(x_1,y)$。又令 $r$ 为 $P$、$Q$ 两点间所求的曲线之弧长，则 $v=\dfrac{dr}{dt}$ 为质点在 $Q$ 点外的速度。由力学知识得

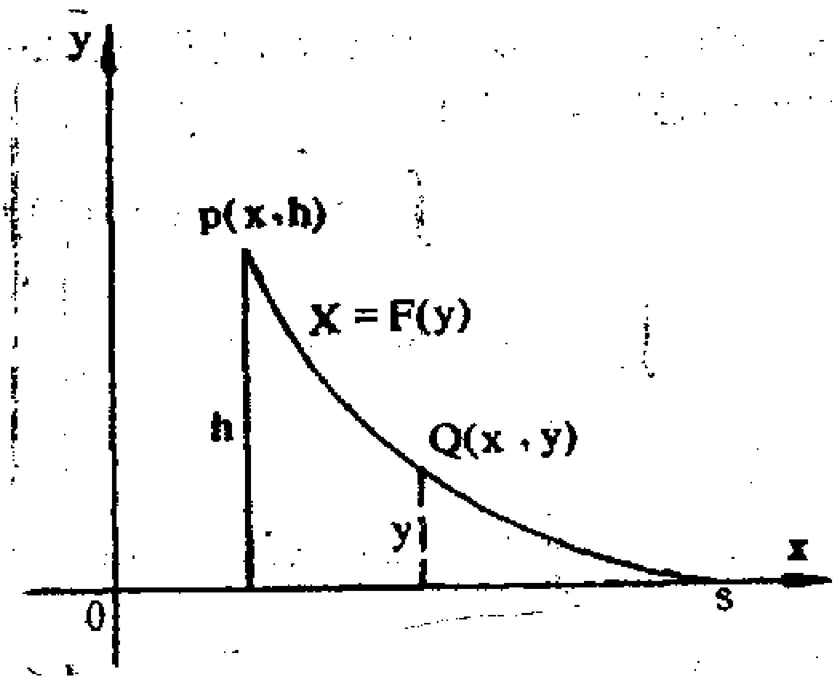



图 1—1

$$v=\sqrt{2g(h-y)}$$

式中 $g$ 为重力加速度。因此

$$\int_0^{f(h)}dt=\int_0^R\frac{dr}{v}=f(h)$$

式中 $R$ 为所求的曲线从 $P$ 点到最低点 $S$ 的弧长，

即
$$\int_0^R\frac{dr}{\sqrt{2g(h-y)}}=f(h) \tag{1.19}$$

设所求的曲线为 $x=F(y)$，则

$$dr=\sqrt{1+F'^2(y)}dy$$

代入(1.19)，就得到**Abel积分方程**

$$\sqrt{2g}\,f(h)=\int_0^h\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{h-y}} \tag{1.20}$$

式中
$$\varphi(y)=\sqrt{1+F'^2(y)}$$

（3） 偏微分方程问题：在解偏微分方程时，常常也可将方程和边界条件一起包含在积分方程内，把解边界问题化为求解积分方程问题。比如偏微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\lambda u=0 \tag{1.21}$$

及其边界条件

$$u\Big|_S=0 \tag{1.22}$$

与积分方程

$$u=\lambda\iiint\limits_{\Omega}GudP$$

是等价的。式中$\Omega$是边界$S$所围的积分区域，$G$是Green函数。

这个问题的证明不在这里叙述，有兴趣的读者可以查阅

参考文献〔1〕。

## §1.3 连续核和$L^2$－核

我们先来看看连续核有些什么基本性质。假定核$K(s,t)$在正方形$K_0$: $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$内是两个变量的连续函数。当然，还要假定核$K(s,t)$在正方形$K_0$内不恒为零，这时核$K(s,t)$叫做**连续核**。

显然，对于任意连续函数$u(t)$，积分

$$v(s)=\int_a^b K(s,t)u(t)dt \tag{1.23}$$

有意义并且是连续的，就是说，上式把连续函数$u(t)$仍然变为连续函数$v(s)$。一般来说，如果$u(t)$是具有有限个不连续点的有界函数（$|u(t)|\leqslant C$），则积分（1.23）仍然是有意义的，这时有

$$v(s+h)-v(s)=\int_a^b [K(s+h,t)-K(s,t)]u(t)dt \tag{1.24}$$

因此，$|v(s+h)-v(s)|\leqslant C\int_a^b |K(s+h,t)-K(s,t)|dt$

由于核$K(s,t)$的连续性，当$h\to 0$时，右端趋于零，所以$|v(s+h)-v(s)|\to 0$，即$v(s)$是连续函数。故(1.23)把有有限个不连续点的有界函数也变为连续函数。

对(1.24)应用Cauchy不等式*，得

$$|v(s+h)-v(s)|^2$$
$$\leqslant\int_a^b |K(s+h,t)-K(s,t)|^2dt\int_a^b |u(t)|^2dt$$

---

*Cauchy不等式是$\left(\int|f(t)g(t)|dt\right)^2\leqslant\int|f(t)|^2dt\int|g(t)|^2dt$，参看参考文献〔2〕或〔4〕。

由此可以看出，如果$u(t)$甚至在某些点的邻域内是无界的，但只要积分$\int_a^b |u(t)|^2 dt$有意义，则函数$v(s)$仍然是连续的。

如果$H(r,s)$是另一个连续核，那末

$$
\begin{aligned}
z(r) &= \int_a^b H(r,s)v(s)ds \\
&= \int_a^b H(r,s)ds\int_a^b K(s,t)u(t)dt \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b H(r,s)K(s,t)ds\right)u(t)dt
\end{aligned}
$$

令
$$\int_a^b H(r,s)K(s,t)ds = L(r,t)$$

它是变量$r$，$t$的连续函数，称为核$K(s,t)$和核$H(r,s)$的**组合核**。连续核的组合核仍然是连续核。

对于$L^2$-核，由于涉及到实变函数知识，这里只是简述一下$L^2$-核的性质而不作证明。有兴趣的读者可以查看任何一本实变函数教材。

如果函数$x(t)$在区间$[a,b]$上可测并且 Lebesque 积分$\int_a^b |x(t)|^2 dt$存在，我们称函数$x(t)$为**$L^2$-函数或平方可积函数**。连续函数显然是$L^2$-函数，而$L^2$-函数的范围比连续函数广得多。

两个$L^2$-函数的积也是$L^2$-函数。其次，如果$a$和$b$是两个常数，$f(x)$和$g(x)$是两个$L^2$-函数，则$af(x)+bg(x)$也是$L^2$-函数。另外，如果两个$L^2$-函数在一个测度为零的集合外相等，那末这两个$L^2$-函数视为一个。总之，所有$L^2$-函数组成一个线性空间。

核$K(s,t)$在正方形$K_0$：$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$内是两个变量$s,t$的可测函数并且Lebesque积分$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 dsdt$

存在，则称为**$L^2$-核或平方可积核**。$L^2$-核把一个$L^2$-函数变成一个$L^2$-函数。另外，两个$L^2$-核的组合核仍是$L^2$-核。

以后论述的许多问题对于$L^2$-核的情况都是成立的。但为了简单起见，我们主要讨论了连续核的情况，在可能的条件下，再推广到$L^2$-核。

## §1.4 平均收敛性

如果有一个$L^2$-函数序列$f_n(x)$，当$n\to\infty$时，存在一个$L^2$-函数$f(x)$，使得

$$\sqrt{\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2 dx} \to 0$$

则称$f_n(x)$**平均收敛于**$f(x)$，记为$f_n \Longrightarrow f$，这里积分是Lebesque意义下的。

平均收敛有一些类似普通收敛的性质。

平均收敛的极限至多只有一个。事实上，如果$f_n(x)\Rightarrow f(x)$，$f_n(x)\Rightarrow g(x)$，那末

$$0 \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$$

$$=\sqrt{\int_a^b |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-g(x)|^2 dx}$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2 dx}$$

$$+\sqrt{\int_a^b |f_n(x)-g(x)|^2 dx} \to 0$$

所以除了一个测度为零的集合外，$f(x)=g(x)$。

这里用到的Minkowski不等式

$$\sqrt{\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx}$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}+\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

可以这样来证明：由于

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx$$

$$=\int_a^b (f(x)+g(x))(\overline{f(x)+g(x)})dx$$

$$=\int_a^b (f(x)+g(x))(\overline{f(x)}+\overline{g(x)})dx$$

$$=\int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx+\int_a^b g(x)\overline{g(x)}dx+\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$+\int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$$

应用Gauchy不等式，得

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)|^2 dx+\int_a^b |g(x)|^2 dx$$

$$+2\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\ \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

$$=\left(\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}+\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}\right)^2$$

所以，

$$\sqrt{\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx}$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}+\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

如果数列$C_n\to C$，$L^2$-函数序列$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g_n(x)\Longrightarrow g(x)$，则

$$C_nf_n\Longrightarrow Cf,\ f_n+g_n\Longrightarrow f+g,\ \int_a^b f_n\overline{g_n}dx\to\int_a^b f\,\overline{g}\,dx.$$

因为$Cf-C_nf_n=(Cf-C_nf)+(C_nf-C_nf_n)$，应用Minkowski不等式，有

$$\sqrt{\int_a^b|Cf-C_nf_n|^2dx}$$

$$\leqslant(C-C_n)\sqrt{\int_a^b|f|^2dx}\quad+C_n\sqrt{\int_a^b|f-f_n|^2dx}$$

从而推出$C_nf_n\Longrightarrow Cf$。

其次，由$(f+g)-(f_n+g_n)=(f-f_n)+(g-g_n)$，得

$$\sqrt{\int_a^b|(f+g)-(f_n+g_n)|^2dx}$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b|f-f_n|^2dx}+\sqrt{\int_n^b|g-g_n|^2dx}$$

所以$f_n+g_n\Longrightarrow f+g$。

最后，令$f_n-f=\sigma_n$，$g_n-g=\tau_n$，于是

$$\int_a^b f\,\overline{g}\,dx-\int_a^b f_n\overline{g_n}\,dx$$

$$=\int_a^b f\,\overline{g}\,dx-\int_a^b(f+\sigma_n)\overline{(g+\tau_n)}dx$$

$$=-\int_a^b\sigma_n\overline{g}\,dx-\int_a^b f\,\overline{\tau_n}dx-\int_a^b\sigma_n\overline{\tau_n}dx$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b|\sigma_n|^2dx}\ \sqrt{\int_a^b|g|^2dx}$$

$$+\sqrt{\int_a^b|f|^2dx}\ \sqrt{\int_a^b|\tau_n|^2dx}$$

$$+\sqrt{\int_a^b|\sigma_n|^2dx}\sqrt{\int_a^b|\tau_n|^2dx}$$

当$n\to\infty$时，右边趋于零，故

$$\int_a^b f_n\bar{g}_n dx\longrightarrow\int_a^b f\,\bar{g}\,dx$$

也就是说，平均收敛序列是可以逐项积分的。

如果无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$平均收敛，那末它也是可以逐项积分的。根据上面的性质，这一点是十分显然的。

另外，如果$f_n\Rightarrow f$，则

$$\sqrt{\int_a^b|f_n|^2dx}\longrightarrow\sqrt{\int_a^b|f|^2dx}$$

事实上，

$$\sqrt{\int_a^b|f_n|^2dx}=\sqrt{\int_a^b f_n\bar{f}_n dx}\longrightarrow$$

$$\sqrt{\int_a^b f\,\bar{f}\,dx}=\sqrt{\int_a^b|f|^2dx}$$

至于无穷级数的平均收敛，自然应该是当$n\to\infty$时，有

$$\sqrt{\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^2dx}\to 0$$

对于连续函数相应地也有平均收敛的概念和性质。不过这时，积分应该是Riemman 积分。如果连续函数序列$f_n(x)$一致收敛于连续函数$f(x)$，则$f_n(x)\Rightarrow f(x)$。事实上，对于任给的正数$\varepsilon$，区间〔$a$，$b$〕上的所有$x$，存在一个$N$，当$n>N$时，

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

这时，$$\sqrt{\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2dx}\leqslant\varepsilon\sqrt{b-a}$$

因此$f_n\Rightarrow f$。反之不然，平均收敛性推不出一致收敛性来。

## §1.5 特征值和特征函数

我们来讨论齐次积分方程

$$y(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{1.25}$$

这里$\lambda$是一个复参数，它对于我们今后的讨论是很有益处的。因此，以后我们总是在核$K(s,t)$前加上这样的参数。显然，方程(1.25)有解$y(s)\equiv 0$，我们称它为**零解**。如果当$\lambda=\lambda_0$时，方程(1.25)有不恒为零的解，则称$\lambda_0$为核$K(s,t)$或方程(1.25)的**特征值**。而方程

$$y(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{1.26}$$

的一切不恒为零的解，都称为对应于特征值$\lambda_0$的**特征函数**。$\lambda_0=0$显然不是特征值。

由于方程(1.25)是线性的，那末如果$y_1(s)$，$y_2(s)$，…，$y_m(s)$是方程(1.25)对应于同一特征值$\lambda_0$的特征函数，则它们的线性组合

$$y(s)=C_1y_1(s)+C_2y_2(s)+\cdots+C_my_m(s)$$

也是对应于同一特征值$\lambda_0$的特征函数。其中$C_1$，$C_2$，…，$C_m$是任意常系数。因此，对应同一特征值$\lambda_0$的所有特征函数组成一个线性空间，这个线性空间的维数叫做特征值$\lambda_0$的**重数**或**秩**。不同的特征值自然可以有不同的**重数**。

## §1.6 正 交 函 数 系

一组复$L^2$-函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots$$

称为**正交函数系**，如果有

$$\int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \lambda_i & (i = j) \end{cases} \tag{1.27}$$

其中$\lambda_i$为不等于零的复数。当$\lambda_i = 1$时，称为**规格化的正交函数系**。显然，任一正交函数系中的各个函数分别乘以$1/\sqrt{\lambda_i}$就变为规格化正交函数系了。

正交函数系是线性无关的。事实上，如果它们线性相关：

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) + \cdots = 0 \tag{1.28}$$

其中$C_1$、$C_2$、…、$C_n$、…是不全为零的复数。那末逐次用$\overline{\varphi_1(x)}$、$\overline{\varphi_2(x)}$、…、$\overline{\varphi_n(x)}$、…乘以(1.28)再积分，得

$$C_i\lambda_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

于是$C_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$。这与假设是矛盾的。

反过来，如果有一组线性无关的复$L^2$-函数，则总可以作出同样多个两两正交且规格化了的复$L^2$-函数，使得原来的函数可以用新的函数来表示。这就是 **Gram-Schmidt 规格正交化过程**。

设$\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$、…，$\psi_m(x)$，…是线性无关的。按照下面的方式逐次地构造$\varphi_k(x)$：

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b \psi_1(x)\overline{\psi_1(x)}dx}}$$

$$\chi_2(x) = \psi_2(x) - \varphi_1(x)\int_a^b \psi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}dx$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{\int_a^b \chi_2(x)\overline{\chi_2(x)}\,dx}}$$

$$\chi_3(x) = \psi_3(x) - \varphi_2(x)\int_a^b \psi_3(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx$$

$$-\varphi_1(x)\int_a^b \psi_3(x)\,\overline{\varphi_1(x)}\,dx$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\chi_3(x)}{\sqrt{\int_a^b \chi_3(x)\,\overline{\chi_3(x)}\,dx}}$$

…………………………………………

$$\chi_m(x) = \psi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)\int_a^b \psi_m(x)\overline{\varphi_{m-1}(x)}\,dx$$

$$-\cdots-\varphi_1(x)\int_a^b \psi_m(x)\,\overline{\varphi_1(x)}\,dx$$

$$\varphi_m(x) = \frac{\chi_m(x)}{\sqrt{\int_a^b \chi_m(x)\,\overline{\chi_m(x)}\,dx}}$$

…………………………………………

$\varphi_m(x)$只是$\chi_m(x)$的规格化。而函数$\chi_k(x)$与已经作好了的函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_{k-1}(x)$的正交性可依次检验。如

$$\int_a^b \chi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx = \int_a^b \psi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx$$

$$-\int_a^b \psi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx\int_a^b \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx = 0$$

$$\int_a^b \chi_3(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx = \int_a^b \psi_3(x)\varphi_1(x)\,dx$$

$$-\psi_3(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx\int_a^b \varphi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx$$

$$-\int_a^b \psi_3(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx\int_a^b \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(x)}\,dx = 0$$

同样地，$\int_a^b \chi_3(x)\overline{\varphi_2(x)}dx=0$，等等。

$$\text{设}\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_k(x),\ \cdots \tag{1.29}$$

是一规格化正交函数系。对于任一〔$a$，$b$〕上的复$L^2$-函数$f(x)$

$$c_k=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

称为$f(x)$关于系(1.29)的**Fourier系数**，从而有

$$\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|^2dx=\int_a^b|f(x)|^2dx-\sum_{k=1}^n|c_k|^2$$

故有**Bessel不等式**

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2dx \tag{1.30}$$

如果对于任何复$L^2$-函数$f(x)$，式(1.30)中的等号都成立，也就是对于任何复$L^2$-函数完备公式(**Parseval等式**)

$$\int_a^b|f(x)|^2dx=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \tag{1.31}$$

成立，则称系(1.29)是完备的。

如果系(1.29)是完备的，那末$L^2$-函数$f(x)$的所有Fourier系数为零将推出$f(x)$在除一个测度为零的集合外恒等于零。事实上，由

$$c_k=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

完备公式变为

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

从而，$f(x)$在除一个测度为零的集合外恒等于零。

对于$L^2$-函数$f(x)$，用它的关于系(1.29)的Fourier系数作级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \tag{1.32}$$

称为$f(x)$的**Fourier级数**。如果这个级数平均收敛，我们不能肯定这个级数平均收敛的极限就是$f(x)$。但是，如果系(1.29)是完备的，那末将$L^2$-函数

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

乘以$\overline{\varphi_p(x)}$再积分，得

$$\int_a^b f_1(x)\overline{\varphi_p(x)} = \int_a^b f(x)\ \overline{\varphi_p(x)}dx - C_p = 0 \quad (p=1,2,\cdots)$$

根据上面的讨论得出$f_1(x)$在除一个测度为零的集合外恒等于零。所以得到如下结论：

如果系(1.29)是完备的，同时$L^2$-函数$f(x)$的Fourier级数平均收敛，则它的和等于$f(x)$。

对于连续函数有相应的结果，这时函数系中的函数都是连续函数，平均收敛应换成一致收敛，而积分则是Riemman积分。

## §1.7　连续函数级数的绝对一致收敛性

如果连续函数级数$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$在变量$x$的某个区域内

是一致收敛的，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在这个区域内是**绝对一致收敛的**。显然绝对一致收敛性可以推出级数的绝对收敛性。另外，由

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+P} |f_k(x)|$$

和绝对一致收敛性可知，对任给正数 $\varepsilon$，存在这样的数$N$，当 $n>N$时，对任何 $p$ 和所指定区域内的任何 $x$，不等式右端不大于 $\varepsilon$。因此，从绝对一致收敛性还可以推出一致收敛性。

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 的通项满足

$$|f_k(x)| \leqslant q_k$$

而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 是收敛的，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 显然是绝对一致收敛的，因此，也是绝对收敛和一致收敛的。但是从级数的绝对一致收敛性推不出$q_k$的存在性。

## §1.8 Arzela 定理

我们先来定义两个概念。

对于函数集合$E$，如果有一常数$M$存在，使得对〔$a, b$〕中任一点 $x$，$E$ 中的任一函数$f(x)$，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数集合$E$在〔$a$，$b$〕上是**一致有界的**。

如果对任给正数 $\varepsilon$，对于函数集合 $E$ 中所有函数存在同一个这样的正数 $\eta$，使得在区间 $[a, b]$ 内所有满足 $|x'-x''|\leqslant\eta$ 的点 $x'$ 及 $x''$，都有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$，则称函数集合 $E$ 在 $[a, b]$ 上是**等度连续**的。

下面，我们来叙述一个后面要用到的定理。

**Arzela 定理** 如果函数 $f(x)$ 的集合 $E$ 是一致有界并且等度连续的，则任何属于 $E$ 的无穷函数集合中可以选出一个一致收敛的子序列来。

**证明** $E$ 中的函数 $f(x)$ 是一致有界的，因此，所有这些函数分布在以 $2M$ 和 $b-a$ 为边的长方形 $ABCD$ 之中（见图 1—2）。

现在，作一个无穷序列

$$\varepsilon_1=\frac{M}{2^{a+1}},\ \varepsilon_2=\frac{M}{2^{a+2}},\ \cdots,\ \varepsilon_k=\frac{M}{2^{a+k}},\ \cdots$$

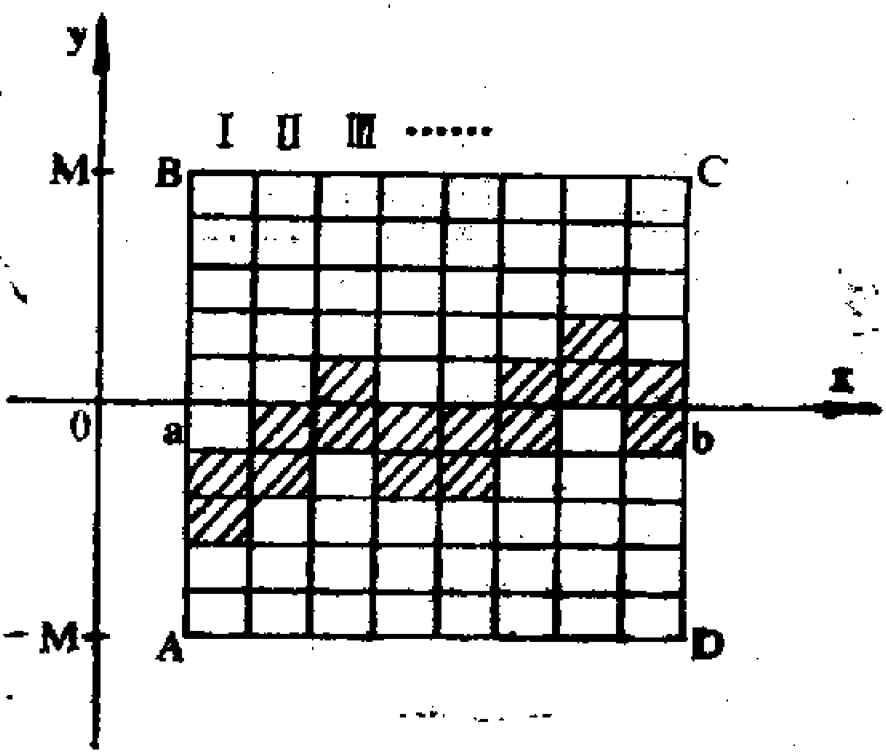



图 1—2

其中整数$a \geqslant 0$。由于$E$中的函数是等度连续的，对于每一个$\varepsilon_k$，可以定出相应的$\eta_k=\eta_k(\varepsilon_k)$。

将长方形$ABCD$的$AB$边分成$2^{a+1}$个长度为$\varepsilon_1$的线段，将$AD$边分成长度小于$\eta_1$的若干等份。通过各分点用平行于坐标轴的线段把长方形$ABCD$分成许多小长方形，用罗马字Ⅰ，Ⅱ，…来记平行于$y$轴的长条。

由于当$|x'-x''|<\eta_1$时，对任一$f(x)$必有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon_1$$

因此，$E$中任何一个函数$f(x)$的图象不可能经过每一个长条中两个以上的相邻小长方形。但是长条中的小长方形个数是有限的，于是，$E$中的函数的无穷集合$\{f(x)\}$中必定有无穷个函数的图象经过长条中的某一对小长方形，不妨设它就是图中画有斜线的那一对。这无穷个函数的图象在相邻的长条中最多分布在四个相邻的小长方形中，而任一个函数的图象却只能在其中两个相邻的小长方形里。在这四个小长方形中的某一对相邻小长方形又包含了无穷个经过前一个长条的斜线小格的函数。我们把这一对小长方形又划上斜线，继续做下去，可得到一个分布在$[a, b]$上，宽度为$2\varepsilon_1$的区域$S_1$（图中划有斜线的部分）。在这区域内包含了函数集合$\{f(x)\}$中的无穷个函数的图象。任取其一，以$f_1^*(x)$记之，其余的用$\{f_1(x)\}$表示，$\{f_1(x)\}$又是一个无穷集合。

对$\{f_1(x)\}$采用同样的办法：以$\varepsilon_2$代替$\varepsilon_1$，以$\eta_2$代替$\eta_1$，得到含于$S_1$中，宽度为$2\varepsilon_2$的区域$S_2$，其中包含了无穷个$\{f_1(x)\}$中的函数的图象。任取其一，记为$f_2^*(x)$，其余的用$\{f_2(x)\}$表示。不断施行这一作法，可以得到一个无穷的函数序列

$$f_1^*(x),\ f_2^*(x),\ \cdots,\ f_k^*(x)\cdots, \tag{1.33}$$

它们互不相同。

当 $i \geqslant K$ 时，函数 $f_i^*(x)$ 均包含在宽度为 $\frac{M}{2^{\alpha+k-1}}$ 的区域 $S_k$ 内，即

$$|f_i^*(x)-f_j^*(x)|\leqslant\varepsilon_{k-1} \qquad (i, j\geqslant k)$$

其中 $k$ 与 $x$ 无关，因此函数序列(1.33)在 $[a, b]$ 上是一致收敛的。

这里我们是对实函数 $f(x)$ 来证明的，但这个定理可以毫不困难地应用在复函数上，读者可以自己去证明。

## 习 题

把下列各个微分方程及初始条件化成等价的积分方程：

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, $y(0)=0, y'(0)=1$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$, $y(0)=0, y'(0)=1$

(4) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+5y=0$,

$y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$

# 第二章　逐　次　逼　近　法

这一章介绍一种很有用的近似方法——逐次逼近法。同时，讨论对于某一类$\lambda$第二种Fredholm积分方程的解的存在和唯一性。然后，应用这一结论求解Volterra积分方程。前几节讨论连续核，最后推广到$L^2$-核的情况。

## §2.1　逐　次　逼　近　法

我们采用逐次逼近法来求第二种Fredholm积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{2.1}$$

的连续解。其中核$K(s,t)$是连续核，自由项$f(s)$是连续函数，$\lambda$是参数。

我们用$y_0(s)=f(s)$作为解的初始近似，代入方程(2.1)的右端，得到

$$\begin{aligned}y_1(s)&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y_0(t)dt\\&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)dt\end{aligned} \tag{2.2}$$

再将(2.2)代入方程(2.1)的右端，得到

$$\begin{aligned}y_2(s)&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y_1(t)dt\\&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(s)dt\\&\quad+\lambda^2\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt.\end{aligned}$$

逐次迭代下去，得到一个级数

$$\varphi(s)=\varphi_0(s)+\lambda\varphi_1(s)+\lambda^2\varphi_2(s)+\cdots+\lambda^n\varphi_n(s)+\cdots \quad (2.3)$$

其中$\varphi_0(s)=f(s)$，$\varphi_1(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)dt$，…，$\varphi_n(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt$这些函数都是连续的。由数学分析的知识知道：如果级数(2.3)是一致收敛的，那末它的和$\varphi(s)$是连续函数并且级数(2.3)可以逐项积分。这时，将(2.3)代入方程(2.1)马上得知它就是方程(2.1)的解。

现在，我们把级数(2.3)改写成另一种形式。先用下面的公式来定义**迭核**

$$K_1(s,t)=K(s,t)$$

$$K_2(s,t)=\int_a^b K_1(s,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n(s,t)=\int_a^b K_{n-1}(s,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

这些迭核都是连续核。这时，级数(2.3)中的各项可以用迭核和自由项$f(s)$来表示

$$\varphi_1(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

$$\varphi_2(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt$$

$$=\int_a^b\int_a^b K(s,t)K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt$$

$$=\int_a^b K_2(s,t_1)f(t_1)dt_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地有

$$\varphi_n(s)=\int_a^b K_n(s,t)f(t)dt \quad (2.4)$$

于是，级数(2.3)可以写成

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_{n+1}(s,t)f(t)dt \qquad (2.5)$$

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(s,t)$ 是一致收敛的，我们把它记为 $R(s,t;\lambda)$，即

$$\begin{aligned}R(s,t;\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(s,t)\\ &= K_1(s,t)+\lambda K_2(s,t)+\cdots\\ &\quad +\lambda^n K_{n+1}(s,t)+\cdots \end{aligned} \qquad (2.6)$$

这时，级数(2.5)中求和号可以和积分号交换，于是

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt \qquad (2.7)$$

## §2.2 逐次逼近法的收敛性

上一节我们看到：如果级数(2.3)一致收敛，它就是方程(2.1)的解。同时，如果级数(2.6)一致收敛，则级数(2.3)可以表示为(2.7)的形式。

现在，我们来证明：对于充分小的$\lambda$，级数(2.3)和(2.6)都是绝对一致收敛的。

事实上，由于$f(s)$和$K(s,t)$分别是$[a,b]$和长方形$K_0$：$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$内的连续函数。我们有如下的估值

$$|f(s)|\leqslant m,\quad |K(s,t)|\leqslant M$$

其中$m$、$M$都为正数，也就是$|f(s)|$及$|K(s,t)|$在对应区域上的最大值。对$\varphi_n(s)$逐次进行估值，得到

$$|\varphi_0(s)|\leqslant m$$

$$|\varphi_1(s)|\leqslant\int_a^b|K(s,t)||\varphi_0(t)|dt\leqslant mM(b-a)$$

$$|\varphi_2(s)|\leqslant\int_a^b|K(s,t)||\varphi_1(t)|dt\leqslant mM^2(b-a)^2$$

一般地有

$$|\varphi_n(s)|\leqslant mM^n(b-a)^n$$

因此，级数(2.3)的通项有如下估值

$$|\varphi_n(s)\lambda^n|\leqslant mM^n|\lambda|^n(b-a)^n$$

从而看出，当

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{2.8}$$

时，级数(2.3)是绝对一致收敛的。这时，它的和就是方程(2.1)的连续解。级数(2.3)叫做**Neumann级数**。

下面我们再来证明级数(2.6)的绝对一致收敛性。类似上面的证明，我们对每一个迭核进行估值，得到

$$|K_n(s,t)|\leqslant M^n(b-a)^{n-1}$$

因此，级数(2.6)的通项的估值为

$$|\lambda^{n-1}K_n(s,t)|\leqslant|\lambda|^{n-1}M^n(b-a)^{n-1}$$

从而在条件(2.8)下，级数(2.6)也是绝对一致收敛的。

绝对一致收敛性又推出了(2.3)和(2.6)的一致收敛性。

## §2.3 解的存在及唯一性定理

现在我们对某一类$\lambda$来证明第二种Fredholm积分方程解的存在及唯一性定理。

首先定义几个概念。对于某个$\lambda_0$，存在正方形$K_0$：$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$内的连续函数$R(s,t;\lambda_0)$满足方程

$$R(s,t;\lambda_0)=K(s,t)+\lambda_0\int_a^b K(s,t_1)R(t_1,t;\lambda_0)dt_1 \quad (2.9)$$

和

$$R(s,t;\lambda_0)=K(s,t)+\lambda_0\int_a^b K(t_1,t)R(s,t_1;\lambda_0)dt_1 \quad (2.10)$$

则称$R(s,t;\lambda_0)$是方程(2.1)或核$K(s,t)$的**预解核**或**解核**。$\lambda_0$叫做**正则值**，方程(2.9)和(2.10)称为**预解方程**。对于正则值$\lambda_0$，预解核是唯一的。事实上，如果还有$R_1(s,t;\lambda_0)$也满足预解方程(2.9)和(2.10)，则有

$$R(s,t;\lambda_0)-R_1(s,t;\lambda_0)$$
$$=\lambda_0\int_a^b K(s,t_1)[R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1$$

于是$\int_a^b R(r,s;\lambda_0)(R(s,t;\lambda_0)-R_1(s,t;\lambda_0))ds$

$$=\lambda_0\int_a^b\int_a^b R(r,s;\lambda_0)K(s,t_1)[R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1ds$$
$$=\lambda_0\int_a^b\left[\int_a^b R(r,s;\lambda_0)K(s,t_1)ds\right][R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1$$
$$=\int_a^b[R(r,t_1;\lambda_0)-K(r,t_1)][R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1$$
$$=\int_a^b R(r,t_1;\lambda_0)[R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1-\int_a^b K(r,t_1)[R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1$$

所以 $\int_a^b K(r,t_1)[R(t_1,t;\lambda_0)-R_1(t_1,t;\lambda_0)]dt_1=0$

故 $R(s,t;\lambda_0)-R_1(s,t;\lambda_0)=0$。

**定理** 对于正则值$\lambda$，方程(2.1)有预解核$R(s,t;\lambda)$，

则方程(2.1)对于这个正则值存在唯一解

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt \qquad (2.11)$$

我们先证明唯一性。即证明在定理的条件下，方程(2.1)的一切解都由(2.11)来表示。

设$y(s)$是方程(2.1)的解。将方程(2.1)的两端乘以$\lambda R(x,s;\lambda)$，再对$s$积分，得

$$\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)y(s)ds=\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds$$

$$+\lambda\int_a^b\left[\int_a^b \lambda R(x,s;\lambda)K(s,t)ds\right]y(t)dt \quad (2.12)$$

由于$R(x,s;\lambda)$满足预解方程(2.10)，得

$$\lambda\int_a^b R(x,s;t)K(s,t)ds=R(x,t;\lambda)-K(x,t)$$

所以，(2.12)式可写成

$$\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)y(s)ds$$

$$=\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)y(t)dt$$

$$-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

又由于$y(s)$是方程(2.1)的解，因此

$$\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt=y(x)-f(x)$$

所以 $\quad y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)y(s)ds$

下面我们再证明解的存在性，即证明由(2.11)确定的函数，在定理的条件下确实是满足方程(2.1)的。

将(2.11)代入方程(2.1)中，移项后，得到

$$f(s)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds-f(s)$$

$$-\lambda\int_a^b K(s,t)[f(t)+\lambda\int_a^b R(t,t_1;\lambda)f(t_1)dt_1]dt=0$$

改写一下，得

$$\int_a^b [R(x,s;\lambda)-K(s,t)$$

$$-\lambda\int_a^b K(s,t_1)R(t_1,t;\lambda)dt_1]f(t)dt=0$$

由预解方程（2.9）可知，上式中的方括号内的式子是恒等于零的，故这个等式确实是成立的，也就是说(2.11)是满足方程(2.1)的。证毕。

下面我们来证明满足条件(2.8)的$\lambda$值都是正则值，也就是说对于满足条件(2.8)的$\lambda$，级数(2.6)的和就是预解核。我们只证明级数(2.6)满足预解方程(2.10)，满足预解方程(2.9)可以类似地证明。将级数(2.6)两端乘以$K(t,x)$，再对$t$积分，得

$$\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_{n+1}(s,t)K(t,x)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+2}(s,x)$$

将两端乘以$\lambda$，得

$$\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}K_{n+2}(s,x)$$

$$=\lambda K_2(s,x)+\lambda^2K_3(s,x)+\cdots$$

考虑到级数(2.6)的表达式，得

$$\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=R(s,t;\lambda)-K(s,x)$$

这就是预解方程(2.10)，只是变量的记号不同而已。

综上所述：当$\lambda$满足条件(2.8)时，方程(2.1)存在唯一的解(2.7)。而齐次方程

$$y(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt$$

只有唯一的零解。

## §2.4 Volterra积分方程

现在把前面对第二种Fredholm积分方程的讨论推广到具有Volterra核的积分方程的情况。

我们先看Volterra核的组合核。假设$K(s,t)$和$H(r,s)$都是Volterra核，那末它们的组合核$L(r,t)$为

$$L(r,t)=\int_a^r H(r,s)K(s,t)ds$$

也是Volterra核。事实上，当$a\leqslant r<s\leqslant b$时，$H(r,s)=0$；当$a\leqslant s<t\leqslant b$时，$K(s,t)=0$。因此，当$r<t$时，就有$L(r,t)=0$。从而上式可写成

$$L(r,t)=\int_t^r H(r,s)K(s,t)ds \quad (a\leqslant t<r\leqslant b)$$

特别地，Volterra核的各次迭核

$$K_n(s,t)=\int_t^s K(s,r)K_{n-1}(r,t)dr \quad (n\geqslant 2)$$

也都是Volterra核。

下面我们只证明：对于任一复数$\lambda$，Neumann级数(2.3)都是一致收敛的。而其它部分的证明和前面几乎是一样的，只是积分区间改为从$a$到$s$就行了。

事实上，令$|K(s,t)|\leqslant M$，$\int_a^b|f(s)|ds\leqslant m$，则有

$$|\varphi_1(s)| = |\int_a^s K(s,t)f(t)dt| \leqslant Mm$$

$$|\varphi_2(s)| = |\int_a^s K(s,t)\varphi_1(t)dt| \leqslant M^2 m(s-a)$$

而一般地有

$$|\varphi_n(s)| = |\int_a^s K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt| \leqslant M^n m\frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

于是级数(2.3)的通项估值为

$$|\lambda^n\varphi_n(s)| \leqslant \lambda^n M^n m \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$< M^n m(b-a)^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$

因此，Neumann 级数(2.3)对于任意复数$\lambda$总是一致收敛的。

这样，第二种Volterra积分方程

$$y(s) = f(s) + \lambda\int_a^s K(s,t)y(t)dt$$

对任意复数$\lambda$都有唯一的连续解

$$y(s) = f(s) + \lambda y_1(s) + \lambda^2 y_2(s) + \cdots$$

其中

$$y_n(s) = \int_a^s K_n(s,t)f(t)dt = \int_a^s K(s,t)y_{n-1}(t)dt$$

也就是说，对于第二种Volterra积分方程，复平面上的全体$\lambda$都是正则值。

对于第一种Volterra积分方程

$$f(s) = \int_a^s K(s,t)y(t)dt \tag{2.13}$$

我们可以把它化为第二种Volterra积分方程来求解。

下面分几种情况来讨论。

（1） $K(s,s) \neq 0$，$a \leqslant s \leqslant b$：如果核$K(s,t)$在三角

形$K_1$内连续且存在连续的偏导数$K'_s(s,t)$，则方程(2.13)有连续解的充要条件是$f(s)$及$f'(s)$在$[a,b]$内连续且$f(a)=0$。如果这个条件成立则方程(2.13)的连续解还是唯一的。

事实上，将方程(2.13)两端对$s$微分，得

$$f'(s)=K(s,s)y(s)+\int_a^s K'_s(s,t)y(t)dt \quad (2.14)$$

变化一下，就得到第二种Volterra积分方程

$$y(s)=\frac{f'(s)}{K(s,s)}-\int_a^s \frac{K_s'(s,t)}{K(s,s)}y(t)dt \qquad (2.15)$$

显然，方程(2.13)的解是满足方程(2.15)的．反之，满足方程(2.15)的解必定满足方程(2.14)，而方程(2.14)可以写成

$$\frac{d}{ds}\left[f(s)-\int_a^s K(s,t)y(t)dt\right]=0$$

因此，方程(2.15)的解满足方程

$$f(s)-\int_a^s K(s,t)y(t)dt=c(t)$$

其中$c(t)$与$s$无关．取$s=a$，则$c(t)=0$．所以，方程(2.15)的解满足方程(2.13)．也就是说，方程(2.13)和(2.15)是等价的．现在只要对第二种Volterra积分方程(2.15)引用前面的结论就行了．

如果核$K(s,t)$和偏导数$K_t'(s,t)$在三角形$K_1$内连续，$f(s)$及$f'(s)$在$[a,b]$内连续，则方程(2.13)存在唯一的连续解．

事实上，令$\int_a^s y(t)dt=\Phi(s)$，对方程(2.13)分部积分，得

$$f(s)=\Big[K(s,t)\Phi(t)\Big]_a^s-\int_a^s K_t'(s,t)\Phi(t)dt$$

$$=K(s,s)\Phi(s)-\int_a^s K_t'(s,t)\Phi(t)dt$$

变化一下就得到第二种Volterra积分方程

$$\frac{f(s)}{K(s,s)}=\Phi(s)-\int_a^s \frac{K_t(s,t)}{K(s,s)}\Phi(t)dt$$

再引用前面的结论就行了。

（2） $K(s,s)\equiv 0, a\leqslant s\leqslant b$：假设$K(s,t)$，$K_s'(s,t)$，$K_{ss}''(s,t)$在三角形$K_1$内都是连续的，在$[a,b]$内有$K(s,s)\equiv 0$，但$K_s'(s,s)\neq 0$，方程(2.13)有连续解的充要条件是$f(s)$，$f'(s)$，$f''(s)$在$[a,b]$内连续且$f(a)=f'(a)=0$。如果这个条件成立，方程(2.13)的连续解还是唯一的。这个解可以由与方程(2.13)等价的第二种Volterra积分方程

$$K_s'(s,s)y(s)=f''(s)-\int_a^s K_{ss}''(s,t)y(t)dt \qquad (2.16)$$

求得。

证明过程可以仿照第(1)种情况进行。

如果$K_s'(s,s)\equiv 0$，$a\leqslant s\leqslant b$，上述结论将不适用。这时可继续对方程(2.16)两边进行微分，直至核$K(s,t)$的某一阶偏导数在$[a,b]$内不恒为零或仅有有限个零点为止，求解方程(2.13)等价于求解相应的方程。

（3） $K(s,s)$仅有有限个零点：设$K(s,s)$在$[a,b]$内有有限个零点：$s_1<s_2<\cdots<s_n$，则方程(2.13)等价于下面的方程组

$$f(s)=\int_a^{s_1} K(s,t)y(t)dt \qquad (a\leqslant s<s_1)$$

$$f(s)=\int_{s_1}^{s} K(s,t)y(t)dt \qquad (s_1\leqslant s<s_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(s)=\int_{s_n}^{s}K(s,t)y(t)dt \qquad (s_n\leqslant s\leqslant b)$$

当 $a\leqslant s<s_1$ 时，$K(s,s)\neq 0$，故第一个方程可按（1）中的办法求解。其余各方程 $K(s,s)$ 只有一个零点，我们可以用多种办法把此零点消去，所得的方程再按（1）中的办法处理。

## §2.5 例

**例1** 解第二种Volterra积分方程

$$y(s)-\lambda\int_0^s e^{s-t}y(t)dt=f(s)$$

核 $K(s,t)=e^{s-t}$，算出Neumann级数的各项

$$\varphi_1(s)=\int_0^s e^{s-t}f(t)dt$$

$$\varphi_2(s)=\int_0^s e^{s-t}\int_0^t e^{t-t_1}f(t_1)dt_1dt$$

$$=\int_0^s e^{s-t}e^{t-t_1}f(t_1)dt_1\int_{t_1}^{s}dt$$

$$=\int_0^s (s-t_1)e^{s-t_1}f(t_1)dt_1$$

$$\varphi_3(s)=\int_0^s e^{s-t}\int_0^t (t-t_1)e^{t-t_1}f(t_1)dt_1dt$$

$$=\int_0^s \frac{(s-t_1)^2}{2!}e^{s-t_1}f(t_1)dt_1.$$

一般地，有

$$\varphi_n(s)=\int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!}e^{s-t}f(t)dt \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

因此，该方程的解为

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_0^s\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(s-t)^n}{n!}\right)e^{s-t}f(t)dt$$

$$= f(s) + \lambda \int_0^s e^{(1+\lambda)(s-t)} f(t)dt$$

**例 2** 解第二种Volterra积分方程

$$S = y(s) - \int_0^s (s-t)y(t)dt$$

计算Neumann级数的各项，令$s-t=v$，$s-u=w$，则$u-t=v-w$。故

$$K_1(s,t) = s-t$$

$$K_2(s,t) = \int_t^s (s-u)(u-t)du = \int_0^v w(v-w)dw$$

$$= \frac{v^3}{3!} = \frac{(s-t)^3}{3!}$$

$$K_3(s,t) = \int_t^s (s-u)\frac{(u-t)^3}{3!}du$$

$$= \frac{1}{3!}\int_0^v w(v-w)^3 dw = \frac{v^5}{5!} = \frac{(s-t)^5}{5!}$$

一般地，有

$$K_n(s,t) = \frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

因此，该方程的预解核为

$$R(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \mathrm{sh}(s-t)$$

方程的解为

$$y(s) = s - \int_0^s \mathrm{sh}(s-t)t\,dt$$

$$= s - \Big[t\,\mathrm{ch}(s-t) + \mathrm{sh}(s-t)\Big]_0^s = \mathrm{sh}\,s$$

**例 3** 解第一种Volterra积分方程

$$\frac{4}{3}s^4=\int_0^s(16t^2-5st-2s^2)y(t)dt$$

此处核$K(s,t)=16t^2-5st-2s^2$。当$S=0$时，$K(s,s)=0$。这是上节谈到的第(3)种情况中只有一个零点的特例. 将原方程微分三次，得

$$\frac{16}{3}s^3=9s^2y(s)+\int_0^s[-9t+4(t-s)]y(t)dt$$

$$16s^2=9s^2y'(s)+9sy(s)-4\int_0^s y(t)dt$$

$$32s=9s^2y''(s)+27sy'(s)+5y(s)$$

最后这个微分方程的通解为

$$y(s)=s+As^{-\frac{1}{3}}+Bs^{-\frac{5}{3}}$$

但当且仅当$A=B=0$时，$y(s)$在原点才是有限的，故原方程的解为

$$y(s)=s$$

## §2.6 正则值和预解核

前面已经得出：对于第二种Fredholm积分方程，绝对值充分小的$\lambda$都是正则值。现在，我们来证明如果$\lambda_0$是核$K(s,t)$的正则值，那末一切充分靠近$\lambda_0$的值也是核$K(s,t)$的正则值，也就是说，正则值集合是复平面的一个开集。

假设$\lambda_0$是核$K(s,t)$的正则值，它的对应的预解核为$R(s,t;\lambda_0)$。由于核$R(s,t;\lambda_0)$在正方形$K_0$内连续，所以

$$|R(s,t;\lambda_0)|\leqslant N$$

类似前面的做法，我们作迭核

$$R_1(s,t;\lambda_0)=R(s,t;\lambda_0)$$

$$R_2(s,t;\lambda_0)=\int_a^b R_1(s,t_1;\lambda_0)R(t_1,t;\lambda_0)dt_1$$

......................................................

$$R_n(s,t;\lambda_0)=\int_a^b R_{n-1}(s,t_1;\lambda_0)R(t_1,t;\lambda_0)dt_1$$

这些连续核显然有如下估值

$$|R_n(s,t,\lambda_0))|\leqslant N^n(b-a)^{n-1}$$

作一个级数

$$R(s,t;\lambda)=R_1(s,t;\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)R_2(s,t;\lambda_0)+\cdots$$
$$+(\lambda-\lambda_0)^{n-1}R_n(s,t;\lambda_0)+\cdots \qquad (2.17)$$

它的通项估值为

$$|(\lambda-\lambda_0)^{n-1}R_n(s,t;\lambda_0)|\leqslant|\lambda-\lambda_0|^{n-1}N^n(b-a)^{n-1}$$

因此，当

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{N(b-a)} \qquad (2.18)$$

时，级数(2.17)是绝对一致收敛的。它的和是一个连续函数。级数(2.17)是Neumann级数的推广。

下面我们证明$R(s,t;\lambda)$是预解核。只证$R(s,t;\lambda)$满足预解方程中的一个，满足另一个的证法相同，不再重复。事实上，

$$R(s,t;\lambda)=R_1(s,t;\lambda_0)+\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}R_n(s,t;\lambda_0)$$

$$=R(s,t;\lambda_0)+\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\int_a^b R_{n-1}(s,t_1;\lambda_0)$$
$$\times R(t_1,t;\lambda_0)dt_1$$
$$=K(s,t)+\lambda_0\int_a^b R(s,t_1;\lambda_0)K(t_1,t)dt_1$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\int_a^b R_{n-1}(s,t_1;\lambda_0)$$

$$\times[K(t_1,t)+\lambda_0\int_a^b R(t_1,t_2;\lambda_0)K(t_2,t)dt_2]dt_1$$

$$=K(s,t)+\lambda_0\int_a^b R(s,t_1;\lambda_0)K(t_1,t)dt_1$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\int_a^b R_{n-1}(s,t_1;\lambda_0)K(t_1,t)dt_1$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_0(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\int_a^b\int_a^b R_{n-1}(s,t_1;\lambda_0)$$

$$\times R(t_1,t_2;\lambda_0)\times K(t_2,t)dt_2dt_1$$

$$=K(s,t)+\lambda_0\int_a^b R(s,t_1;\lambda_0)K(t_1,t)dt_1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n\int_a^b R_n(s,t_1;\lambda_0)K(t_1,t)dt_1$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_0(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\int_a^b R_n(s,t_2;\lambda_0)$$

$$\times K(t_2,t)dt_2$$

$$=K(s,t)+\int_a^b\Big(\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R_n(s,t_1;\lambda_0)$$

$$+\lambda_0R(s,t_1;\lambda_0)+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_0(\lambda-\lambda_0)^{n-1}$$

$$\times R_n(s,t_1;\lambda_0)\Big)K(t_1,t)dt_1$$

$$= K(s,t) + \int_a^b \left(\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{n-1} R_n(s,t_1;\lambda_0)\right)$$

$$\times K(t_1,t)dt_1$$

$$= K(s,t) + \lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t_1,t)dt_1$$

于是，我们证明了当正则值 $\lambda_0$ 的邻域中的$\lambda$满足条件(2.18)时，它也是核$K(s,t)$的正则值，对应的预解核为(2.17)。

由复变函数的知识得知：在核$K(s,t)$的正则值区域里，预解核$R(s,t;\lambda)$是复变量$\lambda$的解析函数。事实上，在任意正则值$\lambda_0$的邻域，预解核$R(s,t;\lambda)$可展成$(\lambda-\lambda_0)$的幂级数(2.17)。

## §2.7 关于$L^2$-核的附注

对于$L^2$-核的情况，前几节的讨论须要在几个地方作些修改。

方程(2.1)的自由项$f(s)$应该是$L^2$-函数，并且解的存在和唯一性也是对$L^2$-函数而言的，但是，关键之处是Neumann级数的收敛和逐项积分的问题。因为这时 Neumann 级数的各项都是$L^2$-函数，沿用连续函数级数的一致收敛性是不行的。

先介绍一个概念——几乎一致收敛。

对于$L^2$-函数序列$\{x_n(s)\}$，如果存在一个非负的$L^2$-函数$p(s)$，使得对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个正整数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$|x_n(s)-x(s)|\leqslant \varepsilon p(s) \qquad (a\leqslant s\leqslant b)$$

则称$\{x_n(s)\}$**几乎一致收敛于**$x(s)$。极限$x(s)$显然是$L^2$-函数。如果$\{x_n(s)\}$几乎一致收敛于$x(s)$，则$\{x_n(s)\}$按平

均意义收敛于$x(s)$。事实上，由$|x_n(s)-x(s)|\leqslant\varepsilon p(s)$，可以得到

$$\int_a^b|x_n(s)-x(s)|^2ds\leqslant\varepsilon^2\int_a^b|p(s)|^2ds$$

因此，$\{x_n(s)\}$是平均收敛于$x(s)$的。

同样，对于$L^2$-核的序列$\{K_n(s,t)\}$，如果存在一个非负的$L^2$-核$P(s,t)$，使得对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个正整数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$|K_n(s,t)-K(s,t)|\leqslant\varepsilon P(s,t)\quad(a\leqslant s,\ t\leqslant b)$$

则称$L^2$-核序列$\{K_n(s,t)\}$**几乎一致收敛于**$K(s,t)$。容易看出，极限$K(s,t)$仍是$L^2$-核。

相应地，可以定义无穷级数的几乎一致收敛性。

几乎一致收敛性有下面这样一些性质，这里不作证明，有兴趣的读者可以查阅参考文献[7]。

（1） $L^2$-函数序列$\{x_n(s)\}$几乎一致收敛的充分必要条件是存在这样的非负$L^2$-函数$p(s)$，使得对任给的$\varepsilon>0$，存在一正整数$N$，当$m,n\geqslant N$时，有

$$|x_n(s)-x_m(s)|\leqslant\varepsilon p(s)\quad(a\leqslant s\leqslant b)$$

（2） $L^2$-核序列$\{K_n(s,t)\}$也有类似的结论。

（3） $\{x_n(s)\}$几乎一致收敛于$x(s)$，$y(s)$是$L^2$-函数，则$\left\{\int_a^b x_n(s)\overline{y(s)}ds\right\}$收敛于$\int_a^b x(s)\overline{y(s)}ds$。

（4） $\{K_n(s,t)\}$几乎一致收敛于$K(s,t)$，$y(t)$是$L^2$-函数，则$\left\{\int_a^b K_n(s,t)y(t)dt\right\}$几乎一致收敛于$\int_a^b K(s,t)\times y(t)dt$。

（5） $\{K_n(s,t)\}$几乎一致收敛于$K(s,t)$，$L(s,t)$是

$L^2$-核，则组合核序列$\left\{\int_a^b K_n(s,r)L(r,t)dr\right\}$和$\left\{\int_a^b L(s,r)\times K_n(r,t)dr\right\}$分别几乎一致收敛于组合核$\int_a^b K(s,r)L(r,t)\times dr$和$\int_a^b L(s,r)K(r,t)dr$。

（6）$L^2$-函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(s)$几乎一致绝对收敛于$x(s)$，$y(s)$是$L^2$-函数，则$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b x_n(s)\overline{y(s)}ds$绝对收敛于$\int_a^b x(s)\times\overline{y(s)}ds$。

（7）$L^2$-核级数$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t)$几乎一致绝对收敛于$K(s,t)$，$y(t)$是$L^2$-函数，则$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b K_n(s,t)y(t)dt$几乎一致绝对收敛于$\int_a^b K(s,t)y(t)dt$。

连续函数是$L^2$-函数，对连续函数几乎一致收敛恰好是通常的一致收敛。事实上，只要取$p(x)$为连续函数就行了。如果级数(2.3)和(2.6)是几乎一致绝对收敛的，那末收敛和逐项积分的问题就解决了。前几节的结论可推广到$L^2$-核的情况。

现在我们来看在什么条件下级数(2.3)和(2.6)是几乎一致绝对收敛的。

对级数(2.3)，从$n\geqslant 1$开始逐项进行估值，得到

$$|\varphi_1(s)|\leqslant\sqrt{\int_a^b |K(s,t)|^2dt}\sqrt{\int_a^b|\varphi_0(t)|^2dt}=p(s)M$$

$\sqrt{\int_a^b|K(s,t)|^2dt}$ 是$s$的$L^2$-函数，记为$p(s)$；$\sqrt{\int_a^b|\varphi_0(t)|^2dt}$ 是一个常数，记为$M$。

$$|\varphi_2(s)|\leqslant\sqrt{\int_a^b|K(s,t)|^2dt}\sqrt{\int_a^b|\varphi_1(t)|^2dt}$$

$$\leqslant p(s)\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(t,t_1)|^2dtdt_1}\cdot M$$

$$|\varphi_3(s)|\leqslant\sqrt{\int_a^b|K(s,t)|^2dt}\sqrt{\int_a^b|\varphi_1(t)|^2dt}$$

$$\leqslant p(s)\left(\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(t,t_1)|^2dtdt_1}\right)^2\cdot M$$

………………………………………………………………

一般地有

$$|\varphi_n(s)|\leqslant p(s)\cdot\left(\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(t,t_1)|^2dtdt_1}\right)^{n-1}\cdot M$$

因此，级数(2.3)的通项有如下估值

$$|\varphi_n(s)\lambda^n|\leqslant|\lambda|^n\left(\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(t,t_1)|^2dtdt_1}\right)^{n-1}Mp(s)$$

所以，当$\lambda$满足

$$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt}} \tag{2.19}$$

时，级数(2.3)是几乎一致绝对收敛的。

类似地也可以证明当$\lambda$满足条件(2.19)时，级数(2.6)也是几乎一致绝对收敛的。当$\lambda$满足

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b|R(s,t;\lambda_0)|^2dsdt}} \tag{2.20}$$

时，级数(2.17)也是几乎一致绝对收敛的。

连续函数也是 $L^2$- 函数．对连续核来说，条件(2.8)和(2.18)可以分别放宽到条件(2.19)和(2.20)。

## 习　　题

1． 用逐次逼近法解积分方程：

(1) $y(s)=s+\int_0^s(t-s)y(t)dt$

(2) $y(s)=1+\int_0^s(t-s)y(t)dt$

(3) $y(s)=\frac{5}{6}s+\frac{1}{2}\int_0^1 sty(t)dt$

(4) $y(s)=\frac{5}{6}s-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\int_0^1(t+s)y(t)dt$

(5) $y(s)=1+\int_0^s y(t)dt$

(6) $y(s)=e^s-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt$

2． 解积分方程：

(1) $y(s)=\sin s-\frac{1}{4}s+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}tsy(t)dt$

(2) $y(s)=s+\int_0^{1/2}y(t)dt$

(3) $y(s)=1-2s-4s^2+\int_0^s[3+6(s-t)-4(s-t)^2]y(t)dt$

(4) $y(s)=\frac{3}{2}e^{s}-\frac{1}{2}se^{s}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}ty(t)dt$

(5) $y(s)=29+6s+\int_{0}^{s}(6s-6t+5)y(t)dt$

(6) $y(s)=\cos s-s-2+\int_{0}^{s}(t-s)y(t)dt$

3. 证明积分方程

$$y(s)=A+Bs+\int_{0}^{s}[C+D(s-t)]y(t)dt$$

有解：$y(s)=K_1e^{m_1s}+K_2e^{m_2s}$。其中$A$、$B$、$C$、$D$是任意常数，$K_1$、$m_1$、$K_2$、$m_2$依赖于$A$、$B$、$C$、$D$。

4. 证明积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_{a}^{b}\left[\sum_{k=1}^{n}p_k(t)Q_k(t)\right]y(t)dt$$

有解：$y(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{m}A_kp_k(s)$。其中$A_k$是常数，由方程组：

$$\sum_{k=1}^{n}kA_k\left[\lambda\int_{a}^{b}p_k(t)Q_m(t)\,dt\right]-A_m$$
$$=\int_{a}^{b}Q_m(t)f(t)dt \qquad (m=1,2,\cdots,n)$$

来决定。

# 第三章 Fredholm 定 理

前面我们讨论了对于第二种 Fredholm 积分方程，充分小的参数$\lambda$都是正则值，对于不是正则值的$\lambda$，我们还没有触及。这一章我们用另一种方法来分析，这个方法是E.Schmidt给出的。先从退化核积分方程分析着手，然后把任意连续核分解成退化核，从而过渡到一般连续核的情形，最后我们再对$L^2$-核进行一些说明。开始时，我们不限定$\lambda$是正则值。

## §3.1 退化核积分方程

我们现在来讨论具有退化核的积分方程，它的解法归结为解线性代数方程组。如果核$K(s,t)$是只为$s$的函数和只为$t$的函数的有限个乘积的和

$$K(s,t)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\overline{\sigma_k(t)} \tag{3.1}$$

则称为**退化核**。这里$\rho_k(s)$，$k=1,2,\cdots,n$可以认为是线性无关的，$\sigma_k(t)$，$k=1,2,\cdots,n$也是一样。$\overline{\sigma_k(t)}$是复函数$\sigma_k(t)$的**共轭**。$\sigma_k(t)$是实函数时，

$$\overline{\sigma_k(t)}=\sigma_k(t)$$

这时，第二种Fredholm积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{3.2}$$

变形为

$$y(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\int_a^b\overline{\sigma_k(t)}y(t)dt \qquad (3.3)$$

令$y_k=\int_a^b\overline{\sigma_k(t)}y(t)dt$，(3.3)可以写成

$$y(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)y_k \qquad (3.4)$$

将(3.4)代入(3.3)中，得到

$$\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)y_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\int_a^b\overline{\sigma_k(t)}f(t)dt$$

$$+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\left(\int_a^b\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{\sigma_k(t)}\rho_i(t)dt\right)$$

又令$f_k=\int_a^b\overline{\sigma_k(t)}f(t)dt$，$a_{ki}=\int_a^b\rho_i(t)\overline{\sigma_k(t)}dt$，同时考虑到$\rho_k(s)$的线性无关性，上式等号两边$\rho_k(s)$的对应系数应该相等，即得

$$y_k=f_k+\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ki}y_i \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (3.5)$$

因此，如果方程(3.2)有一连续解$y(s)$，则$y_k$必定满足线性代数方程组(3.5)。反之，如果方程组(3.5)有解$y_k$，则(3.4)是方程(3.2)的连续解。事实上，(3.4)是显然满足(3.3)的。

类似地，方程(3.2)的对应的齐次方程

$$y(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \qquad (3.6)$$

可以归结为对应于方程组(3.5)的齐次线性代数方程组

$$y_k=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ki}y_i \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{3.7}$$

而方程(3.2)的**共轭方程**

$$y(s)=g(s)+\overline{\lambda}\int_a^b\overline{K(s,t)}y(t)dt \tag{3.8}$$

则可以归结为方程组(3.5)的**共轭线性代数方程组**

$$y_k=g_k+\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}A_{ki}y_i \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{3.9}$$

推导过程就不再重复了。只是要作如下一些改变

$$g_k=\int_a^b\overline{\rho_k(t)}g(t)dt,\quad y_k\triangleq\int_a^b\overline{\rho_k(t)}y(t)dt,$$

$$A_{ki}=\int_a^b\overline{\rho_k(t)}\sigma_i(t)dt$$

而(3.4)应为

$$y(s)=g(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(s)y_k \tag{3.10}$$

值得注意的是$A_{ki}$和方程(3.5)中$a_{ki}$的关系为

$$A_{ki}=\overline{a_{ik}}$$

核$\overline{K(s,t)}$叫做核$K(s,t)$的**共轭核**。

## §3.2 退化核积分方程的Fredholm定理

由上节所述，我们可以用熟知的线性代数方程组的理论得出对于退化核积分方程的类似定理——**Fredholm定理**。

假设$d(\lambda)$是方程组(3.5)的系数行列式，即

$$d(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix} \tag{3.11}$$

则有

**定理 1** 对于使 $d(\lambda)\neq 0$ 的那些 $\lambda$ 值，积分方程(3.2)存在唯一解。这时，对应的齐次方程(3.6)只有零解；对应的共轭方程(3.8)也有唯一解。

这时候，共轭线性代数方程组(3.9)的系数行列式是(3.11)的共轭。因此，使 $d(\lambda)\neq 0$ 的那些$\lambda$值也必定使共轭线性代数方程组(3.9)的系数行列式不为零.反之亦然。

**定理 2** 对于使$d(\lambda)=0$的那些$\lambda$值，齐次积分方程(3.6)及其共轭方程

$$y(s)=\overline{\lambda}\int_a^b\overline{K(t,s)}y(t)dt \tag{3.12}$$

都有非零解。其线性无关解的个数都为 $r=n-q$。其中 $n$ 是退化核(3.1)中的项数，$q$ 是方程组(3.5)的系数矩阵的秩。也就是说，使$d(\lambda)=0$ 的$\lambda$是核$K(s,t)$的 $r$ 重特征值，而 $\overline{\lambda}$ 是核$K(s,t)$的共轭核$\overline{K(t,s)}$的 $r$ 重特征值。

如果函数$f(t)$和$g(t)$，满足关系

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=0 \tag{3.13}$$

则称这两个函数是**正交的**。

**定理 3** 对于使$d(\lambda)=0$ 的那些$\lambda$值，积分方程(3.2)的解存在的充分必要条件是自由项$f(s)$与对应的共轭齐次方程(3.12)的所有解都正交。这时，方程(3.2)的通解可以表为

$$y(s)=y_0(s)+\sum_{i=1}^{r}C_iy_i(s) \tag{3.14}$$

其中$y_0(s)$是方程(3.2)的某一个特解，$y_i(s)$是方程(3.2)的对应的齐次方程(3.6)的$r$个线性无关的特解，$C_i$是任意常数。

**定理 4** 使$d(\lambda)=0$的$\lambda$值只有有限个，也就是说，特征值只有有限个。

注意，这里是假定$\rho_k(s)$、$\sigma_k(t)$不含参数$\lambda$的。如果$\rho_k(s)$，$\sigma_k(t)$依赖复参数$\lambda$，且在$\lambda$的某个区域$\Omega$内解析，则$d(\lambda)$也是在区域$\Omega$内的解析函数。这时，定理 4 要改为

**定理 4′** $d(\lambda)=0$只可能在区域$\Omega$内的孤立点上成立，也就是说，特征值是区域$\Omega$内的一些孤立点。

此定理的证明，读者可以作为习题来练习。

## §3.3 任意连续核积分方程的Fredholm定理

把上述退化核的积分方程的 Fredholm 定理推广到具有任意连续核的积分方程上去有两种办法：一种是用一个退化核的序列来逼近任意连续核，参考文献[2]就是用这种办法；另一种是单用一个退化核$L(s,t)$去逼近$K(s,t)$，使得差$K(s,t)-L(s,t)$足够“小”，以致我们可以对这个差应用逐次逼近法。这个方法是E.Schmidt提出来的。我们采用后一种办法。

由数学分析中熟知的 **Weierstress 多项式逼近定理**，对于连续函数$K(s,t)$，存在一个双变量多项式，使得

$$|K(s,t)-L(s,t)|<\varepsilon$$

式中 $\varepsilon$ 为任意给定的充分小的正数，双变量多项式$L(s,t)$就是退化核。于是连续核$K(s,t)$可以分解为

$$K(s,t)=L(s,t)+Q(s,t) \tag{3.15}$$

其中$L(s,t)$是退化核，$Q(s,t)$是连续核且满足

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b|Q(s,t)|^2dsdt}<\frac{1}{\lambda}$$

这里 $\lambda$ 是任意给定的充分大的正数。

根据条件(2.19)，积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b Q(s,t)y(t)dt \tag{3.16}$$

对于圆

$$C_\omega:\quad |\omega|=\frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b|Q(s,t)|^2dsdt}}$$

内的 $\lambda$ 值都有连续解

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b Q(s,t;\lambda)f(t)dt \tag{3.17}$$

其中$Q(s,t;\lambda)$是核$Q(s,t)$对应于正则值 $\lambda$ 的预解核。也就是说，圆$C_\omega$内的 $\lambda$ 都是方程(3.16)的正则值。

这样，连续核的第二种Fredholm积分方程可以写成

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b L(s,t)y(t)dt$$
$$+\lambda\int_a^b Q(s,t)y(t)dt \tag{3.18}$$

如果$y(s)$是方程(3.18)的解，由(3.17)，则有

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b L(s,t)y(t)dt$$

$$+\lambda\int_a^b Q(s,t;\lambda)\left[f(t)+\lambda\int_a^b L(t,t_1)y(t_1)dt_1\right]dt$$

即
$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b L(s,t)y(t)dt+\lambda\int_a^b Q(s,t;\lambda)f(t)dt$$
$$+\lambda^2\int_a^b Q(s,t;\lambda)\int_a^b L(t,t_1)y(t_1)dt_1dt \quad (3.19)$$

令
$$F(s)=f(s)+\lambda\int_a^b Q(s,t;\lambda)f(t)dt$$
$$P(s,t)=L(s,t)+\lambda\int_a^b Q(s,t_1;\lambda)L(t_1,t)dt_1$$

则(3.19)变为
$$y(s)=F(s)+\lambda\int_a^a P(s,t)y(t)dt \quad (3.20)$$

这是一个退化核积分方程。

事实上，因为
$$L(s,t)=\sum_{k=1}^n \rho_k(s)\overline{\sigma_k(t)}$$

所以
$$P(s,t)=\sum_{k=1}^n \rho_k(s)\overline{\sigma_k(t)}+\lambda\int_a^b Q(s,t;\lambda)$$
$$\times\left[\sum_{k=1}^n \rho_k(t_1)\overline{\sigma_k(t)}\right]dt_1=\sum_{k=1}^n\left[\rho_k(s)\right.$$
$$\left.+\lambda\int_a^b Q(s,t_1;\lambda)\rho_k(t_1)dt_1\right]\cdot\overline{\sigma_k(t)}$$

反之，如果$y(s)$是方程(3.20)的解，必定满足(3.19)，又由(3.17)，$y(s)$必定满足方程(3.18)。因此，方程(3.18)和方程(3.20)是等价的。

显然，对于任意连续核的齐次方程，共轭方程有类似的

结果。

于是，上一节的Fredholm定理对于任意连续核的第二种Fredholm积分方程在圆$C_w$内的$\lambda$值都是成立的。而圆$C_w$是可以任意大的，因此，对整个复平面的$\lambda$值，Fredholm定理都是成立的。注意，这时的定理 4′要改为

**定理 4″** 特征值在圆$C_w$内没有极限点。

事实上，$\lambda = 0$显然不是方程(3.20)的特征值。而组成退化核$P(s,t)$的$\rho_k(s)+\lambda\int_a^b Q(s,t_1;\lambda)\rho_k(t_1)dt_1$是$\lambda$的解析函数。由定理 4′，方程(3.20)的特征值，也就是方程(3.18)的特征值在圆$C_w$内不可能有极限点。

显然，特征值在复平面的有限域内不可能有极限点，但有可能构成按模趋于$\infty$的序列。

## §3.4 预 解 核

现在我们来看对应$d(\lambda)\neq 0$的那些$\lambda$值，核$K(s,t)$的预解核是什么形式。

首先，我们看退化核积分方程。解线性代数方程组(3.6)，得到

$$y_k=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(\lambda)f_i \qquad (k=1,2,\cdots,n) \quad (3.21)$$

其中$d_{ki}(\lambda)$是矩阵

$$\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn}\end{pmatrix} \quad (3.22)$$

的附加矩阵$D_\lambda$中的元素。注意到

$$f_i=\int_a^b \overline{\sigma_i(t)} f(t)dt$$

所以 $$y_k=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\int_a^b \overline{\sigma_i(t)} f(t)dt \tag{3.23}$$

再将(3.23)代入(3.4)中，就得到退化核积分方程(3.2)的解

$$y(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\left\{\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\int_a^b \overline{\sigma_i(t)}\ f(t)dt\right\}$$

$$=f(s)+\lambda\int_a^b\left(\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\rho_k(s)\overline{\sigma_i(t)}\right)f(t)dt$$

$$=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt$$

其中

$$R(s,t;\lambda)=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\rho_k(s)\overline{\sigma_i(t)} \tag{3.24}$$

我们可以证明核$R(s,t;\lambda)$满足预解方程(2.9)和(2.10)。这里只证其中的一个，考虑到(3.24)和(3.1)，有

$$\lambda\int_a^b K(s,t_1)R(t_1,t;\lambda)dt_1$$

$$=\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\overline{\sigma_i(t)}\int_a^b K(s,t_1)\rho_k(t_1)dt_1$$

$$=\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ki}(\lambda)\overline{\sigma_i(t)}\rho_j(s)\int_a^b \overline{\sigma_j(t_1)}\rho_k(t_1)dt_1$$

$$=\frac{\lambda}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ki}(\lambda)a_{jk}\rho_j(s)\overline{\sigma_i(t)}$$

由于　　$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{\mathbf{D}_\lambda}{d(\lambda)}$

故　　$\lambda\mathbf{A}\mathbf{D}_\lambda=\mathbf{D}_\lambda-d(\lambda)\mathbf{I}$，即

$$\lambda\sum_{k=1}^{n}d_{ki}(\lambda)a_{jk}=d_{ji}(\lambda)-d(\lambda)\delta_{ji}$$

其中　　$\delta_{ji}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

所以

$$\lambda\int_a^b K(s,t_1)R(t_1,t;\lambda)dt_1$$

$$=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(d_{ji}(\lambda)-d(\lambda)\delta_{ji})\rho_j(s)\overline{\sigma_i(t)}$$

$$=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ji}(\lambda)\rho_j(s)\overline{\sigma_i(t)}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ji}\rho_j(s)\overline{\sigma_i(t)}=R(s,t;\lambda)-K(s,t)$$

因此，对于退化核积分方程(3.2)来说，使$d(\lambda)\neq 0$的$\lambda$都是正则值，其预解核为(3.24)。

下面再看任意连续核的积分方程，我们只要对退化核积分方程(3.20)采取同上面一样的步骤就行了。这时，行列式(3.11)和矩阵(3.22)中的元素$a_{ij}$为

$$a_{ij}=\int_a^b\left(\rho_j(t)+\lambda\int_a^b Q(t,t_1;\lambda)\rho_j(t_1)dt_1\right)\overline{\sigma_i(t)}dt \quad (3.25)$$

而解线性代数方程组(3.6)得到的是

$$y_k=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(\lambda)F_i \qquad (k=1,2,\cdots,n) \quad (3.26)$$

其中 $$F_i=\int_a^b\overline{\sigma_i(t)}F(t)dt$$

$$=\int_a^b\overline{\sigma_i(t)}\left[f(t)+\lambda\int_a^bQ(t,t_1;\lambda)f(t_1)dt_1\right]dt$$

将(3.26)代入(3.4)中，再注意到核$P(s,t)$的组成， 得到

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^bQ(s,t_1;\lambda)f(t)dt$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{n}\left[\rho_k(t)+\lambda\int_a^bQ(s,t_1;\lambda)\rho_k(t_1)dt_1\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(\lambda)\cdot\int_a^b\overline{\sigma_i(t)}\left(f(t)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int_a^bQ(t,t_1;\lambda)f(t_1)dt_1\right)dt\right]$$

$$=f(s)+\lambda\int_a^bP(s,t;\lambda)f(t)dt$$

其中核$P(s,t;\lambda)$为

$$P(s,t;\lambda)=Q(s,t;\lambda)+\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}d_{ki}(\lambda)\left(\rho_k(s)\right.$$

$$\left.+\lambda\int_a^bQ(s,t;\lambda)\rho_k(t)dt\right)\left(\overline{\sigma_i(t)}\right.$$

$$\left.+\lambda\int_a^bQ(s,t;\lambda)\overline{\sigma_i(s)}ds\right) \qquad (3.27)$$

核(3.27)也是满足预解方程(2.9)和(2.10)的。方法与前面是一样的。读者可以自己练习。

综上所述：复平面内的任一 $\lambda$ 值或是连续核 $K(s,t)$ 的正则值，或是特征值，二者必居其一且只居其一。当 $\lambda$ 是核 $K(s,t)$ 的正则值时，则 $\bar{\lambda}$ 是它的共轭核 $\overline{K(s,t)}$ 的正则值，反之亦然。

## §3.5 Fredholm 行列式

上面的方法对于任意连续核积分方程是无法直接应用的，我们从另一角度来讨论连续核的正则值和预解核。这里我们用的是Fredholm用过的方法。

把区间 $[a,b]$ 分成 $n$ 个小区间

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

每个小区间的长度为

$$\delta_n=\frac{b-a}{n}$$

令 $y(x_i)=y_i$，$f(x_i)=f_i$，$K(x_i,x_j)=K_{ij}$，$i, j=1,2,\cdots,n$。当 $S=x_i$ 时，积分方程(3.2)变为

$$y_i=f_i+\lambda\int_a^b K(x_i,t)y(t)dt \tag{3.28}$$

用Riemann和代替(3.28)中的积分，得

$$y_i=f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}y_j\delta_n \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.29}$$

线性代数方程组(3.29)的系数行列式为

$$d_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda\delta_nK_{11} & -\lambda\delta_nK_{12} & \cdots & -\lambda\delta_nK_{1n}\\ -\lambda\delta_nK_{21} & 1-\lambda\delta_nK_{22} & \cdots & -\lambda\delta_nK_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\lambda\delta_nK_{n1} & -\lambda\delta_nK_{n2} & \cdots & 1-\lambda\delta_nK_{nn}\end{vmatrix}$$

展成 $\lambda$ 的多项式，便为

$$d_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\sum_{p_1=1}^{n}\delta_n K_{p_1p_1}+\frac{\lambda^2}{2!}$$

$$\times\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\delta_n^2\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2}\\ K_{p_1p_2} & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}-\cdots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\times\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=1}^{n}\delta_n^n\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} & \cdots & K_{p_1p_n}\\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} & \cdots & K_{p_2p_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K_{p_np_1} & K_{p_np_2} & \cdots & K_{p_np_n}\end{vmatrix}\tag{3.30}$$

逐次考察(3.30)右端的各项：$\sum_{p_1=1}^{n}\delta_n K_{p_1p_1}$ 就是积分$\int_a^b K(t_1, t_1)dt_1$的Riemann和，当 $n\to\infty$时，它趋于这个积分；同样，$\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\delta_n^2\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}$是积分$\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix}$ $\times dt_1dt_2$的Riemann和；其余的类推。

我们引用下面的记号

$$K\begin{pmatrix}s_1, s_2, \cdots, s_n\\ t_1, t_2, \cdots, t_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(s_1,t_1) & K(s_1,t_2) & \cdots & K(s_1,t_n)\\ K(s_2,t_1) & K(s_2,t_2) & \cdots & K(s_2,t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(s_n,t_1) & K(s_n,t_2) & \cdots & K(s_n,t_n)\end{vmatrix}$$

当 $n\to\infty$时，级数(3.30)就成为

$$d(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n d_n\tag{3.31}$$

其中 $$d_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1, t_2, \cdots, t_n\\ t_1, t_2, \cdots, t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n$$

再来看线性代数方程组(3.29)的解。当 $d_n(\lambda)\neq 0$ 时，有

$$y_i=\frac{1}{d_n(\lambda)}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j=\frac{1}{d_n(\lambda)}\Big(a_{ii}f_i+\delta_n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{a_{ij}}{\delta_n}f_j\Big)$$

其中 $a_{ij}$ 是方程组 (3.29) 的系数矩阵的附加矩阵中的元素。自然我们希望当 $n\to\infty$时，$a_{ii}$趋于$d_n(\lambda)$。而对$a_{ij}(i\neq j)$，我们可以类似对级数(3.31)的讨论，得

$$a_{ij}=\lambda\delta_n\left\{K_{ij}-\lambda\sum_{p_1=1}^{n}\delta_n\begin{vmatrix}K_{ij} & K_{ip_1}\\ K_{p_1j} & K_{p_1p_2}\end{vmatrix}\right.$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\delta_n^2\begin{vmatrix}K_{ij} & K_{ip_1} & K_{ip_2}\\ K_{p_1j} & K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2j} & K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$\left.\times\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=1}^{n}\delta_n^n\begin{vmatrix}K_{ij} & K_{ip_1} & \cdots & K_{ip_n}\\ K_{p_1j} & K_{p_1p_1} & \cdots & K_{p_1p_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K_{p_nj} & K_{p_np_1} & \cdots & K_{p_np_n}\end{vmatrix}\right\}\quad(3.32)$$

于是，当$n\to\infty$时，级数(3.32)中的括号部分就成为

$$D_\lambda(s,t)=K(s,t)-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1 \\ t, t_1 \end{pmatrix}dt_1$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2 \\ t, t_1, t_2 \end{pmatrix}dt_1dt_2-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix}$$

$$dt_1dt_2\cdots dt_n \tag{3.33}$$

线性代数方程组(3.29)的解，当 $n\to\infty$时，就应该是

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b\frac{D_\lambda(s,t)}{d(\lambda)}f(t)dt$$

但是，上面的论述是不严格的。我们先应该证明级数(3.31)和(3.33)在复平面上对 $\lambda$ 是收敛的。

设 $|K(s,t)|\leqslant M$，应用Hadamard不等式* 及多重积分的估值，得

$$|d_n|\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!}[M(b-a)]^n=c_n$$

又由于 $$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{n/2}}\cdot M(b-a)$$

$$=\frac{M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda^n$对于复平面上所有 $\lambda$ 都收敛。故级数(3.31)对于

---

* Hadamard不等式为 $|\det\mathbf{A}|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。其中矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$是$n\times n$阶的复元素的方阵。

复平面上所有$\lambda$都是收敛的，并且$d(\lambda)$是$\lambda$的整函数。

同样地，级数(3.33)的通项系数的绝对值不超过正数

$$c_n = \frac{1}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1}(b-a)^n$$

又由于 $$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \to 0\ (n\to\infty)$$

所以，级数(3.33)对于复平面上所有$\lambda$都是收敛的，并且$D_\lambda(s,t)$也是$\lambda$的整函数。

函数$d(\lambda)$称为核$K(s,t)$的**Fredholm 行列式**。函数$D_\lambda(s,t)$称为**第一阶 Fredholm 子式**。级数(3.31)第一项为1，故$d(\lambda)$不恒为零；又由于它是整函数，故$d(\lambda)$的零点组成一个有限的或可数的集合。后面将看到这些零点恰恰正是核$K(s,t)$的特征值。

紧接着证明使$d(\lambda)\neq 0$的$\lambda$就是核$K(s,t)$的正则值，其相应的预解核就是

$$K(s,t;\lambda) = \frac{D_\lambda(s,t)}{d(\lambda)}$$

注意，这里的$d(\lambda)$不是前节的$d(\lambda)$。

为此，我们来看级数(3.33)中的通项

$$D_n(s,t) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix}$$

$$dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

将行列式$K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix}$按第一列展开，有

$$K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix} = K(s,t)K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}K(t_i,t)K\begin{pmatrix}s,t_1,\cdots,t_{i-1},t_{i+1},\cdots,t_n\\t_1,t_2,\cdots,t_i,t_{i+1},\cdots,t_n\end{pmatrix}$$

在上式的和式的第 $i$ 项中，把变量$t_i$，$t_{i+1}$，$\cdots$，$t_n$换成变量 $u$，$t_i$，$t_{i+1}$，$\cdots$，$t_{n-1}$，再把第 $i$ 列通过$(i-1)$次交换变到第一列，即得

$$K\begin{pmatrix}s,t_1,t_2,\cdots,t_n\\t,t_1,t_2,\cdots,t_n\end{pmatrix}=K(s,t)K\begin{pmatrix}t_1,t_2,\cdots,t_n\\t_1,t_2,\cdots,t_n\end{pmatrix}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}K(u,t)K\begin{pmatrix}s,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\\u,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\end{pmatrix}$$

所以，$D_n(s,t)=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t)K\begin{pmatrix}t_1,t_2,\cdots,t_n\\t_1,t_2,\cdots,t_n\end{pmatrix}$

$$dt_1dt_2\cdots dt_n-\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(u,t)$$

$$\times K\begin{pmatrix}s,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\\u,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}du$$

$$=K(s,t)d_n+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(u,t)$$

$$\times K\begin{pmatrix}s,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\\u,t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}du$$

$$=d_nK(s,t)+\int_a^b D_{n-1}(s,u)K(u,t)du \qquad (3.34)$$

将(3.34)等号两端乘以$\lambda^n$，对 $n$ 求和，再加上$K(s,t)$，即得

$$D_\lambda(s,t)=d(\lambda)K(s,t)+\lambda\int_a^b D_\lambda(s,u)K(u,t)du \quad (3.35)$$

把$D_n(s,t)$中的行列式按第一行展开，类似地可以证得 $D_\lambda(s,$

$t$)还满足下式

$$D_\lambda(s,t)=d(\lambda)K(s,t)+\lambda\int_a^b D_\lambda(u,t)K(s,u)du \quad (3.36)$$

所以，如果$d(\lambda)\neq 0$，则$K(s,t;\lambda)=\dfrac{D_\lambda(s,t)}{d(\lambda)}$满足预解方程(2.9)和(2.10)。

还有另一种方法来求预解核的行列式表示。由于预解核是唯一的，可以把(2.6)乘以$d(\lambda)$得到$D_\lambda(s,t)$的表达式。

我们再来证明一下递推公式。由

$$D_n(s,t)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix} dt_1dt_2\cdots dt_n$$

令 $t=s$，并对 $s$ 积分，得

$$\int_a^b D_n(s,s)ds=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} s, t_1, t_2\cdots, t_n \\ s, t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix} dt_1dt_2\cdots dt_n ds$$

$$=-(n+1)d_{n+1} \quad (3.37)$$

利用(3.34)和(3.37)，从$d_0=1$，$D_0(s,t)=K(s,t)$开始，逐次计算$d_1$，$D_1(s,t)$，$d_2$，$D_2(s,t)$，$\cdots$ 这样可以避免计算$d_n$、$D_n(s,t)$时，表达式中相当麻烦的行列式计算。但是除绝对值充分小的 $\lambda$ 外，一般情况下，收敛是相当慢的，不适于做数值计算。

最后，我们来证明$d(\lambda)$的零点$\lambda_0$就是核 $K(s,t)$ 的特征值。这里要用到的复变函数知识可以查阅参考文献[8]。

先证明一个要用到的公式。在(3.33)式中，令 $t=s$，并且在两端对 $s$ 积分，得

$$\int_a^b D_\lambda(s,s)ds=\int_a^b K(s,s)ds+\sum_{n=1}^{n}\lambda^n\int_a^b D_n(s,s)ds$$

$$= -d_1 + (-1)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\lambda^n d_{n+1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{n-1}d_n = -d'(\lambda) \qquad (3.38)$$

假设$\lambda_0$是$d(\lambda)$的 $k$ 级零点，也就是

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k d_0(\lambda)$$

其中$d_0(\lambda_0) \neq 0$。如果$\lambda_0$又是$D_\lambda(s,t)$的 $l$ 级零点，

即 $$D_\lambda(s,t) = (\lambda - \lambda_0)^l D_\lambda^0(s,t)$$

其中$D_\lambda^0(s,t)$是按$(\lambda - \lambda_0)$的正整数幂展开的级数，它的$(\lambda - \lambda_0)^0$项的系数对于某些 $s$，$t$ 值不等于零。这时，导数 $d'(\lambda)$ 以$\lambda = \lambda_0$为它的$(K-1)$级零点。

由(3.38)得

$$d'(\lambda) = -\int_a^b D_\lambda(s,s)ds = -(\lambda - \lambda_0)^l\int_a^b D_\lambda^0(s,s)ds$$

这式的左端有 $k-1$ 级零点$\lambda_0$，右端已经有因子$(\lambda - \lambda_0)^l$，另外，$D_\lambda^0(s,s)$ 对 $s$ 的积分还可能出现$(\lambda - \lambda_0)$的正整数幂因子。因此，得出 $l \leqslant k-1$。这就是说，如果$d(\lambda)$的 $k$ 级零点又是$D_\lambda(s,t)$的零点，则零点的级一定小于 $k$。故$d(\lambda)$的零点$\lambda_0$一定是$\dfrac{D_\lambda(s,t)}{d(\lambda)}$的极点。

在 $\lambda = \lambda_0$的邻域$\omega$内，将$d(\lambda)$和$D_\lambda(s,t)$展成幂级数

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k c_k + (\lambda - \lambda_0)^{k+1}c_{k+1} + \cdots$$

$$D_\lambda(s,t) = (\lambda - \lambda_0)^l c_l(s,t) + (\lambda - \lambda_0)^{l+1}c_{l+1}(s,t) + \cdots$$

其中$c_k \neq 0$，函数 $c_l(s,t)$ 不恒等于零。注意：$k > l$。把这两个展开式代入(3.36)中，使两边$(\lambda - \lambda_0)^l$项的系数相等，得

$$c_l(s,t)=\lambda_0\int_a^b K(s,u)c_l(u,t)du \tag{3.39}$$

由于$c_l(s,t)$不恒等于零，总可以选$t_0$，使得$c_l(s,t_0)$作为$s$的函数，并且不恒等于零。令$y(s)=c_l(s,t_0)$，由(3.39)知$y(s)$是核$K(s,t)$的对应于特征值$\lambda_0$的特征函数。

## §3.6 例

先看两个退化核积分方程。

**例1** 解积分方程

$$y(s)=s+\lambda\int_0^\pi(1+\sin s\cdot\sin t)y(t)dt$$

这里，$f(s)=s$，$\rho_1(s)=1$，$\sigma_1(t)=1$，$\rho_2(s)=\sin s$，$\sigma_2(t)=\sin t$。因此

$$f_1=\int_0^\pi t dt=\frac{\pi^2}{2}\quad,\quad f_2=\int_0^\pi \sin t\cdot t dt=\pi$$

$$a_{11}=\int_0^\pi dt=\pi\quad,\quad a_{12}=\int_0^\pi \sin t\cdot dt=2$$

$$a_{21}=\int_0^\pi \sin t dt=2\ ,\quad a_{22}=\int_0^\pi \sin^2 t dt=\frac{\pi}{2}$$

$$d(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda\pi & -2\lambda\\ -2\lambda & 1-\lambda\dfrac{\pi}{2}\end{vmatrix}=1-\frac{3\pi}{2}\lambda+\left(\frac{\pi^2}{2}-4\right)\lambda^2$$

如果$d(\lambda)\neq 0$，则由线性代数方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda\pi)y_1-2\lambda y_2=\dfrac{\pi^2}{2}\\ -2\lambda y_1+\left(1-\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)y_2=\pi\end{cases}$$

解得 $y_1=\dfrac{2\pi^2-(\pi^2-8)\pi\lambda}{2[2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2]}$，$y_2=\dfrac{2\pi}{2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2}$

所以，积分方程的解为

$$y(s)=s+\lambda\frac{2\pi^2-(\pi^2-8)\pi\lambda}{2[2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2]}$$

$$+\lambda\frac{2\pi\sin s}{2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2}$$

$$=s+\frac{\pi\lambda[2\pi^2-(\pi^2-8)\lambda+4\sin s]}{2[2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2]}$$

**例 2** 解积分方程

$$y(s)=s^2+\lambda\int_0^1(1+st)y(t)dt$$

这里，$f(s)=s^2$，$\rho_1(s)=1$，$\sigma_1(t)=1$，$\rho_2(s)=s$，$\sigma_2(t)=t$。因此，$f_1=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$，$f_2=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$

$$a_{11}=\int_0^1 dt=1,\quad a_{12}=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$$

$$a_{21}=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2},\quad a_{22}=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$

$$d(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -\frac{\lambda}{2}\\ -\frac{\lambda}{2} & 1-\frac{1}{3}\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{12}\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+1$$

$d(\lambda)=0$ 有两个根$8\pm2\sqrt{13}$。当$\lambda\neq8\pm2\sqrt{13}$时，解线性代数方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)y_1-\frac{\lambda}{2}y_2=\frac{1}{3}\\ -\frac{\lambda}{2}y_1+(1-\frac{1}{3}\lambda)y_2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

得 $$y_1=\frac{24-\lambda}{6(\lambda^2-16\lambda+12)},\qquad y_2=\frac{3-\lambda}{\lambda^2-16\lambda+12}$$

所以，积分方程的解为

$$y(s)=s^2+\lambda\frac{(24-\lambda)+6(3-\lambda)s}{6(\lambda^2-16\lambda+12)}$$

再看几个应用Fredholm行列式的例子。

**例 3** 解积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_0^\pi \sin s\cdot y(t)dt$$

这里核 $K(s,t)=\sin s$ 只是 $s$ 的函数。我们来求 $d(\lambda)$ 和 $D_\lambda(s,t)$。

$$K(u_1,u_1)=K(u_1,u_2)=K(u_1,u_3)=\sin u_1$$
$$K(u_2,u_1)=K(u_2,u_2)=K(u_2,u_3)=\sin u_2$$
$$K(u_3,u_1)=K(u_3,u_2)=K(u_3,u_3)=\sin u_3$$

于是二阶以上的行列式都为零，故

$$d(\lambda)=1-\lambda\int_0^\pi \sin u du=1-2\lambda$$
$$D_\lambda(s,t)=\sin s$$

所以，当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，积分方程的解为

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_0^\pi\frac{\sin s}{1-2\lambda}f(t)dt$$

**例 4** 解积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_0^1(s-t)y(t)dt$$

这里$K(s,t)=s-t$。因此

$$K(u_1,u_1)=0$$

$$\begin{vmatrix} K(u_1,u_1) & K(u_1,u_2) \\ K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_1-u_2 \\ u_2-u_1 & 0 \end{vmatrix} = (u_1-u_2)^2$$

$$\begin{vmatrix} K(u_1,u_1) & K(u_1,u_2) & K(u_1,u_3) \\ K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2) & K(u_2,u_3) \\ K(u_3,u_1) & K(u_3,u_2) & K(u_3,u_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_1-u_2 & u_1-u_3 \\ u_2-u_1 & 0 & u_2-u_3 \\ u_3-u_1 & u_3-u_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

三阶以上的行列式都为零，故：

$$d(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1\int_0^1 (u_1-u_2)^2 du_1 du_2 = 1 + \frac{\lambda^2}{12}$$

$$D_\lambda(s,t) = (s-t) - \lambda\int_0^1 K\begin{pmatrix} s, & u_1 \\ t, & u_1 \end{pmatrix} du_1$$

$$= (s-t) - \lambda st - \frac{\lambda(s+t)}{2} + \frac{\lambda}{3}$$

于是，当$\lambda \neq \pm 2\sqrt{3}\,i$时，积分方程的解为

$$y(s) = f(s) + \lambda\int_0^1 \frac{(s-t)-\lambda st - \frac{\lambda(s+t)}{2} + \frac{\lambda}{3}}{1+\frac{\lambda^2}{12}} f(t)dt$$

$$= f(s) + \lambda\int_0^1 \frac{12(s-t) - 12\lambda st - 6\lambda(s+t) + 4\lambda}{12+\lambda^2} f(t)dt$$

有时候，采用递推公式来求$d(\lambda)$和$D_\lambda(s,t)$是很方便的。

**例 5** 解积分方程

$$y(s) = \sec^2 s + \lambda\int_0^1 y(t)dt$$

这里 $d_0 = 1$，$D_0(s,t) = 1$

$$d_1 = -\frac{1}{1}\int_0^1 ds = -1, \quad D_1(s,t) = d_1\cdot 1 + \int_0^1 ds = 0$$

$$d_2 = d_3 = \cdots = 0 \quad , D_2(s,t) = D_3(s,t)\cdots = 0$$

所以，$d(\lambda) = 1 - \lambda$，$D_\lambda(s,t) = 1$。于是，当$\lambda \neq 1$时，积分方程的解为

$$y(s) = \sec^2 s + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 \sec^2 t dt = \sec^2 s + \frac{\lambda}{1-\lambda} tg^1$$

**例 6** 解积分方程

$$y(s) = \text{tg}\, s \cdot \sec s - \lambda\int_0^1 y(t)dt$$

这里 $d_0 = 1$，$D_0(s,t) = 1$

$$d_1 = -\int_0^1 (-1)ds = 1, \quad D_1(s,t) = 1 + \int_0^1 (-1)ds = 0$$

$$d_2 = d_3 = \cdots = 0, \qquad D_2(s,t) = D_3(s,t) = \cdots = 0$$

所以，$d(\lambda) = 1 + \lambda$，$D_\lambda(s,t) = -1$。于是，当$\lambda \neq -1$时，积分方程的解为

$$y(s) = tg\, s \cdot \sec s - \frac{\lambda}{1+\lambda}\int_0^1 \text{tg}\, t \cdot \sec t\, dt$$

$$= \text{tg}\, s \cdot \sec s - \frac{\lambda}{1+\lambda}(\sec 1 - 1)$$

最后，我们来看一个没有特征值的退化核的例子。

**例 7** 设$K(s,t) = \sin s \cdot \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \leqslant s \leqslant \pi \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{pmatrix}$。这是一个退化核（$n = 1$），于是只有

$$a_{11} = \int_0^\pi \sin t \sin 2t dt = 0$$

这时，齐次线性代数方程组为

$$y_1 = 0$$

因此，对于任何$\lambda$，齐次方程只有零解，故没有特征值存在。

## §3.7 关于$L^2$-核的附注

本章前四节的内容可以毫不困难地推广到$L^2$-核的情况。这时，解的范围也要放宽到$L^2$-函数。

如果$L^2$-核$K(s,t)$有如下的形式

$$K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{n}\rho_\nu(s)\ \overline{\sigma_\nu(t)}\qquad (a\leqslant s,\quad t\leqslant b)$$

其中$\rho_\nu(s)$，$\sigma_\nu(t)$，$\nu=1,2,\cdots,n$都是$L^2$-函数，则核$K(s,t)$称为**有限秩核**。退化核就是有限秩核。前面对于退化核的讨论完全适用于有限秩核。

然后，我们用一连续核$K_1(s,t)$来充分逼近$L^2$-核$K(s,t)$，使得：对任意给定的正数$\varepsilon$，有

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)-K_1(s,t)|^2dsdt}<\frac{1}{2}\varepsilon$$

关于这一点，读者可以查阅参考文献[7]。再用一双变量多项式$P(s,t)$来逼近连续核$K_1(s,t)$，使得

$$|K_1(s,t)-P(s,t)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$P(s,t)$是有限秩核。这样，我们用一有限秩核来充分逼近一个$L^2$-核了。

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)-P(s,t)|^2dsdt}$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)-K_1(s,t)|^2dsdt}$$

$$+\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K_1(s,t)-P(s,t)|^2dsdt}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

于是，$L^2$-核$K(s,t)$分解成

$$K(s,t)=P(s,t)+Q(s,t)$$

其中$P(s,t)$是有限秩的$L^2$-核，$Q(s,t)$满足

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b |Q(s,t)|^2 dsdt} < \frac{1}{w}$$

这个分解称为$\omega$-**分解**。

以下的讨论就和前面是一样的。从而得出$L^2$-核的四个Fredholm定理。但是，第五节的内容要推广到$L^2$-核，就不那么容易了。主要是由于在$d_n$和$D_n(s,t)$的公式中出现了$\int_a^b K(u,u)du$，对于$L^2$-核，$K(u,u)$不一定可测，这个积分也就不一定有意义。

这里，我们只把结论叙述一下：对于$L^2$-核，我们用

$$\delta_0=1$$

$$\delta_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix} 0 & K(u_1,u_2) & \cdots & K(u_1,u_n)\\ K(u_2,u_1) & 0 & \cdots & K(u_2,u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(u_n,u_1) & K(u_n,u_2) & \cdots & K(u_n,u_n)\end{vmatrix}$$

$$du_1du_2\cdots du_n \qquad (n\geqslant 1)$$

和$\Delta_0(s,t)=K(s,t)$

$$\Delta_n(s,t)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots$$

$$\times\int_a^b\begin{vmatrix} K(s,u) & K(s,u_1) & \cdots & K(s,u_n)\\ K(u_1,t) & 0 & \cdots & K(u_1,u_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(u_n,t) & K(u_n,u_1) & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$\times du_1du_2\cdots du_n \qquad (n\geqslant 1)$$

分别代替$d_n$和$D_n(s,t)$。而

$$\delta(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\lambda^n$$

和
$$\Delta_\lambda(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n(s,t)\lambda^n$$

分别称为核$K(s,t)$的**修改的Fredholm行列式和修改的第一阶Fredholm子式**，或者称为**Carleman-Fredholm行列式和第一阶Carleman-Fredholm子式**。

如果$\delta(\lambda)\neq 0$，则$\lambda$是核$K(s,t)$的正则值，其预解核为

$$H_\lambda(s,t)=\frac{\Delta_\lambda(s,t)}{\delta(\lambda)}$$

如果$\delta(\lambda_0)=0$，则$\lambda_0$是核$K(s,t)$的特征值。

## 习　　题

1．对下列核求Fredholm行列式和第一阶子式：

(1) $K(s,t)=1$, $a=0$, $b=1$

(2) $K(s,t)=\sin s$, $a=0$, $b=\pi$

(3) $K(s,t)=st$, $a=0$, $b=10$

(4) $K(s,t)=t$, $a=0$, $b=10$

(5) $K(s,t)=s$, $a=4$, $b=10$

(6) $K(s,t)=2e^se^t$, $a=0$, $b=1$

(7) $K(s,t)=s-t$, $a=0$, $b=1$

2．解退化核积分方程：

(1) $y(s)=s^2+\lambda\int_0^1(1+st)y(t)dt$

(2) $y(s)=s+\lambda\int_0^\pi(1+\sin s\sin t)y(t)dt$

(3) $y(s)=s+\lambda\int_0^1(1+s+t)y(t)dt$

(4) $y(s)=s+\lambda\int_0^1(s-t)y(t)dt$

(5) $y(s)=s+\lambda\int_0^1(s-t)^2y(t)dt$

3. 解齐次积分方程：

(1) $y(s)=\int_0^1 y(t)dt$

(2) $y(s)=\int_0^1 -y(t)dt$

(3) $y(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\, y(t)dt$

(4) $y(s)=\frac{3}{1000}\int_0^{10} sty(t)dt$

(5) $y(s)=\frac{1}{50}\int_0^{10} ty(t)dt$

(6) $y(s)=\frac{1}{42}\int_4^{10} sy(t)dt$

(7) $y(s)=\frac{1}{e^2-1}\int_0^1 ze^s e^t y(t)dt$

4. 解Fredholm积分方程：

(1) $y(s)=\sec^2 s+\lambda\int_0^1 y(t)dt$

(2) $y(s)=\sec s\ \mathrm{tg}\, s-\lambda\int_0^1 y(t)dt$

(3) $y(s)=\cos s+\lambda\int_0^{\pi}\sin s\, y(t)dt$

(4) $y(s)=e^s+\lambda\int_0^{10} sty(t)dt$

(5) $y(s) = s^2 + \lambda\int_0^{10} ty(t)dt$

(6) $y(s) = \sin s + \lambda\int_4^{10} sy(t)dt$

(7) $y(s) = e^s + \lambda\int_0^1 2e^s e^t y(t)dt$

# 第四章 Hermite积分方程

这一章我们专门讨论一类十分重要的积分方程——Hermite积分方程。如果核$K(s,t)$满足

$$K(s,t)=\overline{K(t,s)} \tag{4.1}$$

则称为**Hermite核**。而相应的积分方程就是**Hermite积分方程**。如果核$K(s,t)$是一个实的Hermite核，即

$$K(s,t)=K(t,s) \tag{4.2}$$

则称为**对称核**。如果核$K(s,t)$满足

$$K(s,t)=-K(t,s) \tag{4.3}$$

则称为**斜对称核**。显然，Hermite核$K(s,t)$的任意次迭核都是Hermite核。与前几章不同，我们是对$L^2$-核来进行讨论的，而连续核只是$L^2$-核的特例。

## §4.1 特征值的存在性

前面我们讨论过没有特征值的核的例子。对于Hermite核来说，这种情况是永远不可能出现的，即任一非零Hermite核至少有一个特征值。

现在我们来证明这个问题。首先，我们只须证明方程

$$y(s)-\mu\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)y(t_1)dt_1dt=0 \tag{4.4}$$

至少存在一个特征值及特征函数就行了。事实上，设$\mu_0$为特征值，$y_0(s)$为对应的特征函数。令$\mu_0=\lambda_0^2$，就有

$$\left[y_0(t)+\lambda_0\int_a^b K(t,t_1)y_0(t_1)dt_1\right]$$

$$-\lambda_0\int_a^b K(s,t)[y_0(t)+\lambda_0\int_a^b K(t,t_1)y_0(t_1)dt_1]dt=0$$

即 $x_0(s)=y_0(s)+\lambda_0\int_a^b K(s,t)y_0(t)dt$ 是方程

$$x(s)-\lambda_0\int_a^b K(s,t)x(t)dt=0$$

的解。因此，或者

$$x_0(s)=y_0(s)+\lambda_0\int_a^b K(s,t)y_0(t)dt=0$$

或者

$$x(s)-\lambda_0\int_a^b K(s,t)x(t)dt=0$$

有非零解。在前一种情况，$y_0(s)$ 就是核 $K(s,t)$ 的对应于 $-\lambda_0$的特征函数；在后者，$\lambda_0$是核$K(s,t)$的特征值。

其次，我们证明方程（4.4）至少存在一个特征值及特征函数。

先引入几个记号

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(s)\overline{\psi(s)}ds$$

式中$\varphi(s)$、$\psi(s)$是$[a,b]$上的复$L^2$-函数。还有

$$Ky=\int_a^b K(s,t)y(t)dt$$

$$K^2y=KKy=\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)y(t_1)dt_1dt$$

……………………………………………

采用这里的记号，$\varphi_n(s)$平均收敛于极限$\varphi(s)$就可写成

$$(\varphi_n-\varphi,\varphi_n-\varphi)\to 0$$

如果$K(s,t)$是Hermite核，那末有

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K\psi) \tag{4.5}$$

事实上，有

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\overline{\psi(s)}ds=\int_a^b\varphi(t)\overline{\int_a^b K(t,s)\psi(s)dsdt}$$

对于$L^2$-函数$y(s)$

$$\frac{(Ky,Ky)}{(y,y)}=\frac{(y,K^2y)}{(y,y)}$$

不可能都为零，否则$Ky$就恒等于零了。对于$L^2$-核$K(s,t)$，有

$$\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt<\infty$$

上式不仅是非负的而且有上确界，我们记为$\mu$，这时，显然有

$$\frac{(K^2y,K^2y)}{(y,y)}=\frac{(K^2y,K^2y)}{(Ky,Ky)}\cdot\frac{(Ky,Ky)}{(y,y)}\leqslant\mu^2 \tag{4.6}$$

由上确界的性质，存在序列$y_n^*$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(Ky_n^*,Ky_n^*)}{(y_n^*,y_n^*)}=\mu$$

令 $y_n=\dfrac{y_n^*}{\sqrt{(y_n^*,y_n^*)}}$，故有

$$(y_n,y_n)=1 \tag{4.7}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}(Ky_n,Ky_n)=\mu \tag{4.8}$$

于是，序列$\varphi_n=\mu y_n-K^2y_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\varphi_n)=0 \tag{4.9}$$

事实上，

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\mu^2(y_n,y_n)-2\mu(y_n,K^2y_n)+(K^2y_n,K^2y_n)$$

根据(4.6)和(4.7)，得

$$(\varphi_n,\varphi_n)\leqslant2\mu^2-2\mu(y_n,K^2y_n)$$

又由(4.8)，得到(4.9)，即序列$\mu y_n - K^2 y_n$平均收敛于零。

$K$称为**全连续算子**。如果当$(y_n, y_n)$是一致有界时，从$Ky_n$中可以选出一个平均收敛的子序列来。

假如$K^2$是全连续算子，那末我们可以从$K^2 y_n$中选出一个平均收敛的子序列来，不妨就认为是$K^2 y_n$。这时，由于$\mu y_n - K^2 y_n$平均收敛于零，因此，$y_n$平均收敛于某个$L^2$-函数$y(s)$，并且

$$\mu y(s) = K^2 y(s)$$

即核$K^2$有特征值$1/\mu$，对应的特征函数是$y(s)$。

这里实际上证明的是当$K^2$是全连续的算子时，Hermite核$K(s,t)$至少有一个特征值。

最后，我们来讨论在什么情况下，$K^2$是全连续算子。

我们来考察

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{4.10}$$

其中$\psi(s)$、$\varphi(t)$是连续函数。作差

$$\psi(s+h) - \psi(s) = \int_a^b \Big[K(s+h,t) - K(s,t)\Big]\varphi(t)dt$$

由Cauchy不等式，得

$$|\psi(s+h) - \psi(s)|^2$$

$$\leqslant \int_a^b |K(s+h,t) - K(s,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

直接从(4.10)，又有

$$|\psi(s)|^2 \leqslant \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

由于$\varphi(t)$满足$(\varphi,\varphi) \leqslant M^2$，即

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \leqslant M^2 \tag{4.11}$$

从而，$|\psi(s+h)-\psi(s)|^2 \leqslant M^2\int_a^b |K(s+h)-K(s,t)^2 dt$ (4.12)

$$|\psi(s)|^2 \leqslant M^2\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \tag{4.13}$$

只要核$K(s,t)$满足下列两个条件

(1) 存在$N^2$，使得

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \leqslant N^2 \tag{4.14}$$

(2) 对任给的正数$\varepsilon$，存在$\eta$，当$|h|<\eta$时，使得

$$\int_a^b |K(s+h,t)-K(s,t)|^2 dt \leqslant \varepsilon \tag{4.15}$$

则由(4.12)和(4.13)可以知道：无穷函数集合$\{\psi(s)\}$是等度连续并且是一致有界的。根据Arzela定理，可以从无穷函数集合$\{\psi(s)\}$中选出一致收敛的子序列来，这个子序列又是平均收敛的。这时，$K$就是全连续算子。

显然，当核$K(s,t)$是连续核时，条件(4.14)和(4.15)都是满足的。当$\varphi(t)$、$\psi(s)$是$L^2$-函数，核$K(s,t)$是$L^2$-核时，证明时需要更多一些泛函分析知识。读者可以查看泛函分析教材。

实际上，积分

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty$$

是$K$为全连续算子的充分条件。

这时，显然$K^2$，$K^3$，…也都是全连续算子。

## §4.2 特 征 函 数 系

这一节，我们来建立具有Hermite核的积分方程的一些简单性质。

(1) 每一个特征值都是实的。事实上，设 $\lambda$ 是核 $K(s,t)$ 的特征值，对应的特征函数是 $y(s)$。于是

$$\lambda\int_a^b\int_a^b K(s,t)y(t)dt\,\overline{y(s)}ds=\int_a^b y(s)\overline{y(s)}ds\neq 0$$

即 $\lambda\int_a^b\int_a^b K(s,t)y(t)dt\,\overline{y(s)}ds$ 是实数。又 $K(s,t)$ 是Hermite核，故

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)y(t)dt\,\overline{y(s)}ds$$

$$=\int_a^b y(t)\int_a^b\overline{K(t,s)}\,\overline{y(s)}dsdt$$

$$=\int_a^b\int_a^b\overline{K(t,s)y(s)ds\overline{y(t)}}dt$$

$$=\overline{\int_a^b\int_a^b K(t,s)y(s)ds\,\overline{y(t)}\,dt}$$

因此，$\int_a^b\int_a^b K(s,t)y(t)dt\overline{y(s)}ds$ 也是实数。所以 $\lambda$ 是实数。

(2) 对应于不同特征值的特征函数是正交的。事实上，设 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 是不同的特征值，对应的特征函数分别是 $y_1(s)$，$y_2(s)$。于是有

$$\frac{1}{\lambda_1}y_1(s)=\int_a^b K(s,t)y_1(t)dt$$

$$\frac{1}{\lambda_2}y_2(s)=\int_a^b K(s,t)y_2(t)dt$$

将前一式乘以 $\overline{y_2(s)}$ 后对 $s$ 积分，后一式取共轭再乘以 $y_1(s)$ 后对 $s$ 积分，两式再相减。考虑到 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 都是实数，得

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b y_1(s)\,\overline{y_2(s)}ds$$

$$=\int_b^a\int_a^b K(s,t)y_1(t)\overline{y_2(s)}dtds$$

$$-\int_a^b\int_a^b y_1(s)K(t,s)\overline{y_2(t)}dsdt=0$$

由于$\lambda_1\neq\lambda_2$，则

$$\int_a^b y_1(s)\overline{y_2(s)}ds=0$$

我们知道，在$\lambda$的任何有限变动区间上，只可能找到有限个特征值．于是我们可以将所有特征值按照绝对值不减少的次序排列

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|\leqslant\cdots$$

任何特征值在数列中出现的次数等于它的重数．如果特征值的个数是无限的，则当$n\to\infty$时，$|\lambda_n|\to\infty$．这样，一切特征函数也可排列成序列

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots \tag{4.16}$$

显然，它是正交系，当然也可以使它规格化．系(4.16)称为核$K(s,t)$的**特征函数系**．

(3) 对于特征函数，我们有

$$\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}=\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_k(s)}ds \tag{4.17}$$

从而，可以把左端视为核$K(s,t)$关于规格正交函数系(4.16)的Fourier系数．Bessel不等式为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|\overline{\varphi_k(t)}|^2}{\lambda^2_k}\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2ds$$

对$t$积分，得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt<\infty$$

如果特征值有无限个，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt<\infty$$

## §4.3 关于特征函数系的展开

特征函数构成的规格正交系(4.16)可能是不完备的. 但是只要$L^2$-核$K(s,t)$的Fourier级数

$$\sum_k\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.18}$$

在$K_0$: $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$内平均收敛, 而不论特征函数系(4.16)是否完备, 它的和就等于核. 即

$$K(s,t)=\sum_k\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.19}$$

考虑到$K_0$内的$L^2$-函数

$$\omega(s,t)=K(s,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}$$

显然, 它关于特征函数系(4.16)的Fourier系数为

$$\int_a^b\omega(s,t)\overline{\varphi_k(s)}ds=0\qquad(k=1,2,\cdots) \tag{4.20}$$

我们来证明$\omega(s,t)$在$K_0$内恒等于零. 如果它在$K_0$内不恒等于零, 那末以它为核的积分方程

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b\omega(s,t)\psi(t)dt$$

是Hermite积分方程. 它至少有一个特征值$\lambda_0$, 对应的特征函数是$\psi_0(s)$.

即

$$\psi_0(s)=\lambda_0\int_a^b\omega(s,t)\psi_0(t)dt \tag{4.21}$$

将(4.20)的两端乘以$\lambda_0\psi_0(t)$再对$t$积分, 得

$$\lambda_0\int_a^b\int_a^b\omega(s,t)\psi_0(t)\overline{\varphi_k(s)}dsdt=0\quad (k=1,2,\cdots)$$

注意到(4.21)，可得

$$\int_a^b\psi_0(s)\overline{\varphi_k(s)}ds=0\qquad (k=1,2,\cdots)\tag{4.22}$$

即$\psi_0(s)$与特征函数系(4.16)中的每一个函数都正交。(4.21)又可写成

$$\psi_0(s)=\lambda_0\int_a^b\left(K(s,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}\right)\psi_0(t)dt$$

由于级数(4.18)的平均收敛性和(4.22)，得

$$\psi_0(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)\psi_0(t)dt$$

就是说，$\psi_0(s)$也应该是核$K(s,t)$的对应于$\lambda_0$的特征函数。因此，它应该是特征函数系(4.16)中对应于$\lambda_0$的那些特征函数的线性组合。但这是不可能的。因为$\psi_0(s)$和一切$\varphi_k(s)$都正交，而正交函数系是线性无关的。

因此，$\omega(s,t)$在$K_0$内恒等于零。

如果核$K(s,t)$只有有限个特征值，前面的证明完全有效，这时有

$$K(s,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}$$

其中$n$是特征函数系(4.16)中特征函数的个数。这说明核$K(s,t)$是有限秩的。反过来，有限秩核的特征值只有有限个。因此，对于Hermite核，特征值个数有限的充分必要条件是核为有限秩核。作为特例，如果核$K(s,t)$是连续核，只要把上面的级数(4.18)的平均收敛性改成一致收敛性就行了。

另外还有一类函数，它关于特征函数系(4.16)的Fourier

级数在$[a, b]$上是几乎一致绝对收敛的，这类函数就是可用核来表示的函数。如果存在$[a, b]$上的$L^2$-函数$h(t)$，使得

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)h(t)dt \tag{4.23}$$

是$L^2$-函数，$F(s)$就叫做**可用核来表示的函数**。

对于这类$L^2$-函数有如下重要的**Hilbert-Schmidt 定理**：

用核来表示的函数能展开成关于特征函数系（4.16）的Fourier级数，这个级数是几乎一致绝对收敛的。

这里，我们只证明这个级数是几乎一致绝对收敛的。它的和就等于函数$F(s)$，放在下一节去讨论。

用$h_k$记$L^2$-函数$h(t)$的Fourier系数

$$h_k=\int_a^b h(t)\overline{\varphi_k(t)}dt \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$L^2$-函数$F(s)$的Fourier系数为

$$F_k=\int_a^b F(s)\overline{\varphi_k(s)}ds=\int_a^b\int_a^b K(s,t)h(t)\overline{\varphi_k(s)}dtds$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_k(s)}ds\right]h(t)dt \quad (k=1,2,\cdots)$$

因此，
$$F_k=\int_a^b\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}h(t)dt=\frac{h_k}{\lambda_k} \tag{4.24}$$

于是，$L^2$-函数$F(s)$的Fourier级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s) \tag{4.25}$$

由Cauchy不等式，得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s)\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right|^2}$$

由Bessel不等式，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right|^2\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2dt=p(s)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2\leqslant\int_a^b|h(t)|^2dt=M$$

所以，级数(4.25)是几乎一致绝对收敛的。

## §4.4 Hilbert-Schmidt定理的证明

这一节证明 Hilbert-Schmidt 定理。但我们证明的是更广泛意义上的。这里引用§4.1引入的记号和术语。

**Hilbert-Schmidt定理** 对全连续的 Hermite核$K(s,t)$，用核来表示的函数

$$F(s)=Kh=\int_a^b K(s,t)h(t)dt$$

均可展开成特征函数系(4.16)的 Fourier 级数，收敛性是按平均收敛意义下的。

由§4.1 知道，对全连续的Hermite核$K(s,t)$，从上确界

$$\mu_1=sup\frac{(Ky,Ky)}{(y,y)}$$

出发，可以得到一个特征值

$$|\lambda_1|=\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$$

对应的特征函数为$\varphi_1(s)$。现在我们只考虑$L^2$- 函数中满足$(y,\varphi_1)=0$，即与$\varphi_1(s)$正交的那些函数$y(s)$。这时上确界

$$\mu_2=sup\frac{(Ky,Ky)}{(y,y)}$$

必定满足$\mu_2 \leqslant \mu_1$。这样就得到另一个特征值

$$|\lambda_2| = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$$

对应的特征函数为$\varphi_2(s)$。接着我们来考虑那些与$\varphi_1(s)$和$\varphi_2(s)$都正交的$L^2$-函数，即满足

$$(y, \varphi_1) = (y, \varphi_2) = 0$$

的函数。这时有上确界$\mu_3$

$$\mu_3 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1$$

得到的特征值是

$$|\lambda_3| = \frac{1}{\sqrt{\mu_3}}$$

特征函数是$\varphi_3(s)$。

如果照上面的作法进行不下去了，这时，对于凡是与$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，…，$\varphi_n(s)$都正交的函数$y(s)$，上确界

$$sup \frac{(Ky, Ky)}{(y, y)} = 0$$

也就是$Ky = 0$。

我们来看$L^2$-函数

$$y = h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k$$

这个函数显然是与$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，…，$\varphi_n(s)$都正交，因此

$$Ky = Kh - \sum_{k=1}^{n} h_k K\varphi_k = 0$$

即 $$Kh = \sum_{k=1}^{n} h_k K\varphi_k$$

注意到$K\varphi_k=\dfrac{\varphi_k}{\lambda_k}$，于是

$$Kh=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k$$

不难验证，$Kh$的Fourier系数就是$\dfrac{h_k}{\lambda_k}$．事实上，

$$\begin{aligned}(Kh,\varphi_k)&=\int_a^b\int_a^b K(s,t)h(t)\overline{\varphi_k(s)}dtds\\&=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_k(s)}h(t)dsdt\\&=\int_a^b\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}h(t)dt=\frac{h_k}{\lambda_k}\end{aligned}$$

问题已经解决。

如果上面的作法可以无限制地进行下去。我们先证明$\mu_n\to0$。如若不然，$\mu_n\to a$（$a>0$）．由于$K$是全连续的，则特征函数$\varphi_n(s)$是规格化的。
即

$$(\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(s)}ds=1$$

因此，$K\varphi_n$中有平均收敛的子序列，不妨就是$K\varphi_n$。当$n$，$m\to\infty$时，

$$(K\varphi_n-K\varphi_m,\ K\varphi_n-K\varphi_m)\to0$$

可是，注意到$\varphi_n$是两两正交的，因此

$$\begin{aligned}&(K\varphi_n-K\varphi_m,K\varphi_n-K\varphi_m)\\&=\left(\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n-\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m\ ,\ \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n-\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m\right)\\&=\frac{1}{\lambda^2_n}(\varphi_n,\varphi_n)+\frac{1}{\lambda^2_m}(\varphi_m,\varphi_m)=\mu_n+\mu_m\to2a\end{aligned}$$

这就得出了矛盾。所以，$\mu_n \to 0$。

现在仍旧来看函数

$$y = h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k$$

由
$$\frac{(Ky, Ky)}{(y, y)} \leqslant \mu_{n+1}\text{，得}$$
$$(Ky, Ky) \leqslant \mu_{n+1}(y, y)$$

容易验证

$$(y, y) = \left(h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k,\ h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k\right) = (h, h) - \sum_{k=1}^{n} |h_k|^2$$
$$\leqslant (h, h)$$

因此，$(Ky, Ky) \leqslant \mu_{n+1}(h, h)$

当 $n \to \infty$时，右端趋于零，故

$$\left(K(h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k),\ K(h - \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_k)\right) \to 0$$

也就是说

$$Kh - \sum_{k=1}^{n} K h_k \varphi_k = Kh - \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k$$

平均收敛于零，亦即

$$Kh = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k$$

从前面可以看到$\frac{h_k}{\lambda_k}$就是$Kh$关于特征函数系(4.16)的Fourier系数。定理证毕。

从这里还可以证明§4.2中关于特征函数的性质，留给读者去思考。

最后，我们来证明上一节留下的问题：用核来表示的函数就是几乎一致绝对收敛的Fourier级数(4.25)的和。

事实上，由于Fourier级数(4.25)几乎一致绝对收敛，设它的和为$\phi(s)$。几乎一致绝对收敛又推出平均收敛，因此，级数(4.25)平均收敛于$\phi(s)$。刚才我们又证明了$F(s)=Kh$可展成平均收敛的Fourier级数，由于平均收敛极限的唯一性，$F(s)$和$\phi(s)$应该是一致的，因此几乎一致绝对收敛的Fourier级数(4.25)的和就是$F(s)$。

## §4.5 迭 核 的 展 开

这一节我们把迭核作为可用核来表示的函数，对特征函数系作Fourier级数展开。

从公式

$$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

可以看出，把$K_2(s,t)$作为$s$的函数，$t$作为参数，$K(t_1,t)$起了$h(t_1)$的作用，$K_2(s,t)$就是可用核$K(s,t)$来表示的函数。由Hilbert-Schmidt定理，

$$K_2(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.26}$$

在整个$K_0$: $a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$内都是成立的。考虑到公式

$$K_n(s,t)=\int_a^b K(s,t_1)K_{n-1}(t_1,t)dt_1$$

从(4.24)得出：如果把$K_n(s,t)$作为$s$的函数，它的Fourier系数应该是$K_{n-1}(t_1,t)$的Fourier系数除以$\lambda_k$，这里$K_{n-1}(t_1,t)$

视作$t_1$的函数，依次类推。而 $K_1(s,t)$ 的 Fourier 系数和 $K_2(s,t)$的Fourier系数为

$$\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \quad 和 \quad \frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}$$

一般地，$K_n(s,t)$的Fourier系数为

$$\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n}$$

由Hilbert-Schmidt定理，有

$$K_n(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(s)\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n}\quad (n=2,3,\cdots) \tag{4.27}$$

它在$K_0$内也是成立的。

我们来考察这些级数的收敛情况。由Hilbert-Schmidt定理，当 $t$ 为$[a,b]$中的一固定值时，这些级数关于 $s$ 是几乎一致绝对收敛的。又由核的Hermite 性，固定 $s$，关于 $t$ 也是几乎一致绝对收敛的。可以证明：这些级数在 $K_0$ 内对于两个变量是几乎一致绝对收敛的。此证明留给读者去作练习。

在公式(4.27)中，设 $t=s$ 并对 $s$ 积分就得出迭核的积的表达式：

$$\int_a^b K_n(s,s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^n} \tag{4.28}$$

公式(4.28)的左端叫做**迭核的迹**。当 $n=2$时，就是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}=\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt \tag{4.29}$$

以前我们只证明了不等式(§4.2)。注意：公式(4.28)对于

$n=1$ 可能是不成立的。

## §4.6 非 齐 次 方 程

现在讨论非齐次方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{4.30}$$

首先，假设 $\lambda$ 不是特征值，这时方程(4.30)有唯一解。我们用特征函数来表示它。

令 $g(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt$

方程(4.30)可写成

$$y(s)=f(s)+g(s) \tag{4.31}$$

按照Hilbert-Schmidt定理，$g(s)$可展为关于核$K(s,t)$的特征函数的几乎一致绝对收敛级数

$$g(s)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k(s) \tag{4.32}$$

但是，其中Fourier系数$g_k$无法用(4.24)来求得，因为公式中积分号下含有未知函数$y(t)$。我们用$f(t)+g(t)$来代替$y(t)$，得

$$g(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)[f(t)+g(t)]dt \tag{4.33}$$

设$f_k$是已知函数$f(s)$的Fourier系数，$f(t)+g(t)$的Fourier系数就是$(f_k+g_k)$。由公式(4.24)，有

$$g_k=\frac{\lambda(f_k+g_k)}{\lambda_k} \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{4.34}$$

从而，得到

$$g_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{4.35}$$

由公式(4.31)，得到方程(4.30)的解为

$$y(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \tag{4.36}$$

现在设 $\lambda$ 是 $p$ 重特征值，即

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$$

因为核$K(s,t)$是Hermite核，方程(4.30)与其共轭方程是相同的。方程(4.30)可解的充分必要条件是$f(s)$与$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\cdots$，$\varphi_p(s)$都正交，即Fourier系数$f_1 = f_2 = \cdots = f_p = 0$。和前面一样地讨论，公式(4.34)和(4.35)确定$g_{p+1}$以后的一切$g_k$，而$k=1,2,\cdots$，$p$时，公式(4.34)成为恒等式。我们可以把$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\cdots$，$\varphi_p(s)$的任意线性组合添加到方程(4.30)的解上。这一点与我们以前看到的是一致的。这时，方程(4.30)的解为

$$y(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{f_k \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} + c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \cdots + c_p\varphi_p(s) \tag{4.37}$$

其中$c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_p$是任意常数。

下面我们再来讨论方程(4.30)的预解核。前面我们得到了迭核的展开式，将它们代入(2.6)，假如满足条件(2.18)，因此$|\lambda| < |\lambda_1|$，于是

$$R(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2} + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^3} + \cdots \tag{4.38}$$

将(4.38)的每一项取绝对值，再合并$|\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}|$的各项，得到

$$|K(s,t)|+|\varphi_1(s)\overline{\varphi_1(t)}|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{|\lambda_1|^{n+1}}$$

$$+|\varphi_2(s)\overline{\varphi_2(t)}|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{|\lambda_2|^{n+1}}+\cdots$$

$$=|K(s,t)|+|\varphi_1(s)\overline{\varphi_1(t)}|\frac{|\lambda|}{|\lambda_1|(|\lambda_1|-|\lambda|)}$$

$$+|\varphi_2(s)\varphi_2(t)|\frac{|\lambda|}{|\lambda_2|(|\lambda_2|-|\lambda|)}+\cdots$$

$$=|K(s,t)|+\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}|\frac{|\lambda|}{|\lambda_k|(|\lambda_k|-|\lambda|)}$$

而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(s)|\,|\overline{\varphi_k(t)}|}{|\lambda_k|^2}$$

是几乎一致收敛的。将这两个级数的通项进行比较，其比值为

$$\frac{|\lambda|\cdot|\lambda_k|^2}{|\lambda_k|(|\lambda_k|-|\lambda|)}\longrightarrow|\lambda|$$

不依赖变量 $s$ 和 $t$。因此级数(4.38)是绝对收敛的。于是可以合并$\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}$项，得到预解核关于特征函数的展开式

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)} \qquad (4.39)$$

注意，这里我们是在条件(2.18)下得出这个展开式的。实际上，只要满足

$$\lambda \neq \lambda_k \qquad (k=1,2,\cdots)$$

这个展开式都是成立的。

## §4.7 可Hermite化的方程

在应用中经常会遇到一些可以经简单变换化为Hermite核的积分方程。

（1） 斜对称方程：如果核$K(s,t)$是斜对称核，即

$$K(s,t)=-K(t,s)$$

那末核$iK(s,t)$就是Hermite核，事实上，

$$\overline{iK(s,t)}=-iK(t,s)=iK(s,t)$$

于是，具有斜对称核的积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t))y(t)dt$$

用$\lambda i$代替$\lambda$就得到Hermite积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b iK(s,t)y(t)dt$$

从而可以知道，斜对称核积分方程一定有特征值且所有特征值都是纯虚数。

（2） 可Hermite化的积分方程：这种方程的形式为

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)P(t)y(t)dt \qquad (4.40)$$

其中$K(s,t)$是Hermite核，$P(t)$是实$L^2$-函数且除开一个测度为零的集合外有$P(t)>0$。我们在方程(4.40)两端乘以$\sqrt{P(s)}$，用$x(s)$代替$y(s)\sqrt{P(s)}$就得到

$$x(s)=f(s)\sqrt{P(s)}+\lambda\int_a^b K(s,t)\sqrt{P(s)P(t)}x(t)dt \qquad (4.41)$$

这个方程的核$K(s,t)\sqrt{P(s)P(t)}$是Hermite核。我们可

以对方程(4.41)应用前面的理论，得到特征值$\lambda_h$和特征函数$x_h(s)$。利用

$$x_h(s)=\varphi_h(s)\sqrt{P(s)}$$

就可以求得$\varphi_h(s)$。由于

$$\int_a^b x_i(s)\overline{x_j(s)}ds=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

故有

$$\int_a^b P(s)\varphi_i(s)\,\overline{\varphi_j(s)}ds=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

满足这样条件的函数系$\varphi_h(s)$叫做**带权$P(s)$的规格化正交系**。

也可以用变量代换

$$s'=\int_a^s P(u)du\ ,\qquad t'=\int_a^t P(u)du$$

把(4.40)化成Hermite核积分方程。事实上，令$f_1(s')=f(s)$，$w(s')=y(s)$，$K_1(s',t')=K(s,t)$，则(4.40)变为

$$y(s')=f_1(s')+\lambda\int_0^l K(s',t')y(t')dt' \qquad (4.42)$$

其中 $\quad l=\int_a^b P(u)du$

## §4.8* 例

解积分方程

$$18s^2-9s-4=y(s)-\lambda\int_0^1(s+t)y(t)dt$$

核$K(s,t)$显然是Hermite核。齐次方程

$$y(s)=\lambda\int_0^1(s+t)y(t)dt \qquad (4.43)$$

的解为

$$y(s)=C_1s+C_2$$

其中$C_1, C_2$为未知常数．代入(4.43)，得

$$C_1s+C_2=\lambda s\left(\frac{C_1}{2}+C_2\right)+\lambda\left(\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{2}\right)$$

于是 $C_1=\dfrac{\lambda C_1}{2}+\lambda C_2,\quad C_2=\dfrac{\lambda C_1}{3}+\dfrac{\lambda C_2}{2}$

消去$C_1$、$C_2$就得到

$$\lambda^2+12\lambda-12=0$$

因此，核$K(s,t)$的全体特征值为

$$\lambda_1=4\sqrt{3}-6,\qquad \lambda_2=-4\sqrt{3}-6$$

于是对应的特征函数为

$$\varphi_1(s)=\frac{1+\sqrt{3}\,s}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\quad \varphi_2(s)=\frac{1-\sqrt{3}\,s}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

所以，$f_1=\displaystyle\int_0^1(18s^2-9s-4)\left(\frac{1+\sqrt{3}s}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)ds=\frac{-(5+\sqrt{3})}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$f_2=\frac{-5+\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

故当$\lambda\neq\lambda_1$、$\lambda_2$时，原方程的解为

$$y(s)=18s^2-9s-4-\frac{\lambda\left\{\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\lambda+\frac{5}{2}s-\frac{3}{4}\lambda s\right\}}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}$$

当$\lambda=4\sqrt{3}-6$时，原方程的解为

$$y(s)=18s^2-9s-4-\lambda\frac{(-5+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}s)}{2(\lambda+4\sqrt{3}+6)(2-\sqrt{3})}$$

$$+C_1\frac{1+\sqrt{3}s}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

## 习 题

1. 求下列 Hermite 核的 Fredholm 行列式和第一阶子式:

(1) $K(s,t)=st$, $a=0$, $b=1$

(2) $K(s,t)=\sin s\sin t$, $a=0$, $b=2\pi$

(3) $K(s,t)=e^se^t$, $a=0$, $b=\ln 2$

(4) $K(s,t)=s+t$, $a=0$, $b=1$

(5) $K(s,t)=s^2+t^2$, $a=0$, $b=1$

(6) $K(s,t)=s^2t+st^2$, $a=0$, $b=1$

(7) $K(s,t)=s^2+st+t^2$, $a=0$, $b=1$

2. 解积分方程:

(1) $y(s)=\int_0^1 y(t)dt$

(2) $y(s)=s+\lambda\int_0^1 y(t)dt$, $\lambda\neq 1$

(3) $y(s)=\frac{1}{2}-s+\int_0^1 y(t)dt$

(4) $y(s)=\lambda\int_0^1 (s+t)y(t)dt$

(5) $y(s)=s+\lambda\int_0^1 (s+t)y(t)dt$

(6) $y(s)=(1-\sqrt{3}s)+(-6+4\sqrt{3})\int_0^1 (s+t)y(t)dt$

(7) $y(s)=(1+\sqrt{3}s)+(-6-4\sqrt{3})\int_0^1 (s+t)y(t)dt$

# 第五章　奇性核积分方程

前面四章我们是对连续核或$L^2$-核进行讨论．这一章我们把前面的理论推广到一类无界核——奇性核的情况．

## §5.1　奇　性　核

我们先讨论奇性核的性质．在建立奇性核积分方程的基本理论时，空间的维数起了很重要的作用．另外，高维奇性核积分方程在应用中又显得十分重要．因此，我们直接在$n$维欧氏空间的有限区域$D$内来讨论奇性核积分方程．

如果核为

$$K(M,N)=\frac{L(M,N)}{r^{\alpha}} \tag{5.1}$$

其中$r$为$M$，$N$两点间的距离，$L(M,N)$是区域$D$中两个点$M$、$N$的有界函数，$\alpha$满足条件$0<\alpha<n$，则称这类核为**奇性核**．在这里，我们只研究$L(M,N)$是连续函数的情况，而它是有界函数的情况就象从连续核到$L^2$-核的推广一样，这章所叙述的理论也是成立的，只是解的范围要从连续解放宽到$L^2$-函数．如果$\alpha$满足$0<\alpha<\frac{n}{2}$，则称核$K(M,N)$为**弱奇性核**．

设$d$为有限区域$D$的直径，即$D$中点与点间的最大距离．区域$D$则完全含于一个以$D$中任一点$M$为球心，$d$为半径的$n$维空间中的超球面内．因此

$$\int_D |K(M,N)|dN \leqslant C\int_{r\leqslant d}\frac{dN}{r^a} = C\int_0^{|s|}ds\int_0^d \frac{r^{n-1}}{r^a}dr$$

$$= \frac{C|s|d^{n-a}}{n-a} \tag{5.2}$$

其中$C$是连续函数$L(M,N)$在区域$D$的上界，即$|L(M,N)|\leqslant C$，$|s|$是超球面的面积。令$B=\frac{C|s|d^{n-a}}{n-\alpha}$，于是

$$\int_D |K(M,N)|dN \leqslant B$$

假设$u(N)$是$D$内连续函数，显然积分

$$v(M)=\int_D K(M,N)u(N)dN$$

是有意义的。我们来证明$v(M)$也是连续函数。考虑

$$v(M')-v(M)=\int_D [K(M',N)-K(M,N)]u(N)dN$$

连续函数$u(N)$在$D$内有

$$|u(N)|\leqslant C \tag{5.3}$$

于是

$$|v(M')-v(M)|\leqslant C\int_D |K(M',N)-K(M,N)|dN \tag{5.4}$$

假设$M'$与$M$的距离为$\delta$。我们把区域$D$分成$D_1$和$D_2$，$D_1$在以$M$为球心，$2\delta$为半径的超球$D_{2\delta}$内，$D_2$在$D_{2\delta}$之外。因此

$$\begin{aligned}&\int_D |K(M',N)-K(M,N|dN\\&=\int_{D_2}|K(M',N)-K(M,N)|dN\\&\quad+\int_{D_2}|K(M',N)-K(M,N)|dN\end{aligned} \tag{5.5}$$

我们先看(5.5)中的第一项。

$$\int_{D_1}|K(M',N)-K(M,N)|dN$$

$$\leqslant\int_{D_1}|K(M'N)|dN+\int_{D_1}|K(M,N)|dN$$

$$\leqslant\int_{D_{2\delta}}|K(M',N)|dN+\int_{D_{2\delta}}|K(M,N)|dN \quad (5.6)$$

由(5.2)，得到

$$\int_{D_{2\delta}}|K(M,N)|dN=\frac{C|s|(2\delta)^{n-\alpha}}{u-\alpha}$$

而以$M$为球心，$2\delta$为半径的超球$D_{2\delta}$显然含于以$M'$为球心，$3\delta$为半径的超球$D_{3\delta}$中，因此有

$$\int_{D_{2\delta}}|K(M',N)|dN\leqslant\int_{D_{3\delta}}|K(M',N)|dN$$

$$=\frac{C|s'|(3\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

于是

$$\int_{D_1}|K(M',N)-K(M,N)|dN$$

$$\leqslant\frac{C}{n-\alpha}[|s|(2\delta)^{n-\alpha}+|s'|(3\delta)^{n-\alpha}] \qquad (5.7)$$

其中$|s|$是超球$D_{2\delta}$的球面积，$|s'|$是超球$D_{3\delta}$的球面积。我们总可以取$\delta$为这样小，使得右端小于$\frac{\varepsilon}{2C}$。

再来看(5.5)中的第二项。如果$M'$与$M$的距离小于$\delta$，而$N$在$D_2$内，则

$$K|(M',N)-K(M,N)|$$

$$=\frac{|r^\alpha L(M',N)-r'^\alpha L(M,N)|}{r^\alpha r'^\alpha}$$

$$\leqslant \frac{|L_1(M',M,N)|}{\delta^{2\alpha}}$$

其中 $r$，$r'$分别为$M$与$N$，$M'$ 与$N$ 的距离，显然$r'\geqslant\delta$，$r\geqslant\delta$。而$L_1(M',M,N)$是$D$内三个变量$M'$、$M$、$N$ 的连续函数，且当$M'$和$M$重合时，它等于零。因此，存在正数$\eta\leqslant\delta$，当$M$、$M'$的距离不大于$\eta$时，有

$$\int_{D_2}|K(M',N)-K(M,N)|dN\leqslant\frac{\varepsilon}{2C} \tag{5.8}$$

由(5.4)、(5.7)和(5.8)得到：函数$v(M)$是$D$内的连续函数。

我们再注意一点：$\eta$只与$\varepsilon$，$C$有关，并不依赖于$u(N)$的具体选择，因此核$K(s,t)$把一致有界的连续函数集合变为了等度连续函数集合。又由(5.2)、(5.3)可以得到

$$|v(M)|\leqslant CB$$

即等度连续函数集合$\{v(M)\}$又是一致有界的。

下面我们来讨论奇性核的迭核的性质。先看两个奇性核的组合核

$$K(M,N)=\int_D K_1(M,P)K_2(P,N)dP \tag{5.9}$$

其中 $$|K_1(M,P)|=\frac{|L_1(M,P)|}{r_1^{\alpha}}\leqslant\frac{C_1}{r_1^{\alpha}}$$

$$|K_2(P,N)|=\frac{|L_2(P,N)|}{r_2^{\beta}}\leqslant\frac{C_2}{r_2^{\beta}}$$

于是

$$|K(M,N)|\leqslant C_1C_2\int_D\frac{dP}{r_1^{\alpha}r_2^{\beta}}\leqslant C_1C_2\int_{D'}\frac{dP}{r_1^{\alpha}r_2^{\beta}}$$

这里$r_1$、$r_2$分别是$P$到$M$、$N$的距离，$D'$是以$M$为球心，区域$D$的直径$d$的2倍为半径的超球。令$r_0$是$M$、$N$间的距离，

$|s|$是超球$D'$的球面积，则$r_2 \geqslant r_1 - r_0$，于是

$$\int_{D'} \frac{dP}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}} \leqslant \int_0^{|s|} ds \int_0^{2d} \frac{dr_1}{r^{\alpha-n+1}(r_1 - r_0)^{\beta}}$$

作变换$r_1 = r_0 \chi$，则

$$\int_{D'} \frac{dP}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}} \leqslant |s| \int_0^{2d/r_0} \frac{d\chi}{r_0^{\alpha+\beta-n} \chi^{\alpha-n+1} (\chi-1)^{\beta}}$$

$$= \frac{|s|}{r_0^{\alpha+\beta-n}} \left[ \int_0^2 \frac{d\chi}{\chi^{\alpha-n+1}(\chi-1)^{\beta}} + \int_2^{2d/r_0} \frac{d\chi}{\chi^{\alpha-n+1}(\chi-1)^{\beta}} \right]$$

上式中前一个积分是常数，记为$A$.后一个积分中，当$x > 2$时，$(\chi-1)^2 > \frac{1}{4}\chi^2$.事实上，

$$(\chi-1)^2 - \frac{1}{4}\chi^2 = \frac{1}{4}(3\chi-2)(\chi-2)$$

因此

$$\int_{D'} \frac{dP}{r_1^{\alpha} r_2^{\beta}} \leqslant \frac{|s|}{r_0^{\alpha+\beta-n}} \left[ A + 2^{\beta} \int_2^{2d/r_0} \chi^{n-1-\alpha-\beta} d\chi \right]$$

当$\alpha+\beta < n$时，

$$|K(M,N)| \leqslant C_1 C_2 |s| \left( A d^{n-\alpha-\beta} + \frac{2^{\beta} \cdot d^{n-\alpha-\beta}}{n-\alpha-\beta} \right) = C$$

当$\alpha+\beta = n$时，

$$|K(M,N)| \leqslant C_1 C_2 |s| \left( A + 2^{\beta} \ln \frac{d}{r_0} \right)$$

当$\alpha+\beta > n$时，

$$|K(M,N)| \leqslant \frac{C_1C_2|s|}{r_0^{\alpha+\beta-n}}[A+2^\beta\int_2^{2d/r_0}\chi^{n-1-\alpha-\beta}d\chi]$$

$$\leqslant \frac{C_1C_2|s|}{r_0^{\alpha+\beta-n}}[A+2^\beta\int_2^{\infty}\chi^{n-1-\alpha-\beta}d\chi]$$

$$=\frac{C_1C_2|s|}{r_0^{\alpha+\beta-n}}[A+\frac{2^{n-\alpha}}{\alpha+\beta-n}]=\frac{C}{r_0^{\alpha+\beta-n}}$$

其中$C$为某个常数。于是，推出$K(M,N)$的迭核有如下估计

$$|K_m(M,N)|\leqslant\begin{cases} C_m & (m\alpha<(m-1)n) \\ \dfrac{C_m}{r_0^{m\alpha-(m-1)n}} & (m\alpha>(m-1)n)\end{cases}$$

其中$C_m$是某个常数。因此，当$m>\dfrac{n}{n-2}$时，$m$次迭核$K_m(M,N)$是有界的。其实当(5.1)中$L(M,N)$是连续函数时，我们还可以证明$K_m(M,N)$是连续的。

## §5.2 奇性核积分方程

我们可以采用很多种方法把Fredholm定理推广到奇性核积分方程，这里选用一种较简单的方法。

假设奇性核$K(M,N)$满足

$$|K(M,N)|=\frac{|L(M,N)|}{r^\alpha}\leqslant\frac{C}{r^\alpha}$$

作一个新函数

$$K^*(M,N)=\begin{cases}K(M,N) & (r\geqslant\delta)\\ \dfrac{C}{\delta^\alpha} & (r<\delta)\end{cases}$$

其中$\delta$是给定的正数。显然这个函数是连续的。我们再看函

数

$$K(M,N)-K^*(M,N)$$

当$r\geqslant\delta$时，它等于零。当$r<\delta$时，有

$$0<K(M,N)-K^*(M,N)<C\left(\frac{1}{r^\alpha}-\frac{1}{\delta^\alpha}\right)$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_D|K(M,N)-K^*(M,N)|dN\\&=\int\Big(K(M,N)-K^*(M,N)\Big)dN\\&\leqslant C\int_{r<\delta}\frac{dN}{r^2}\leqslant\varepsilon_1\end{aligned}$$

只要$\delta$充分小，$\varepsilon_1$可为任意小的正数．于是

$$|K(M,N)-K^*(M,N)|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{\int_D dN}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

因为$K^*(M,N)$是连续的，可以把它分解成退化核和一个绝对值充分小的连续核

$$K^*(M,N)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(M)\overline{\psi_i(N)}+K_2(M,N)$$

其中$|K_2(M,N)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$．因此

$$\begin{aligned}K(M,N)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(M)\overline{\psi_i(N)}&+K_2(M,N)\\&+[K(M,N)-K^*(M,N)]\end{aligned}$$

令$K_1(M,N)=K_2(M,N)+[K(M,N)-K^*(M,N)]$，就有

$$|K_1(M,N)|\leqslant|K_2(M,N)|+|K(M,N)-K^*(M,N)|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由此可见，对于奇性核$K(M,N)$，可以采用§3.3的办法，完全成功地推出Fredholm定理。

这时，Fredholm行列式需要作一些修改，因为行列式的对角线元素成为无穷大了。这里不作证明，只是叙述一些有用的结果。其实这些结果不只是对奇性核适用，凡是从某个迭核开始，以后的迭核都连续的情况均适用。

假设从迭核$K_m(M,N)$开始，以后的迭核都是连续的。容易证明：如果$\lambda$是方程

$$y(M)=\lambda\int_D K(M,N)y(N)dN \tag{5.10}$$

的特征值，则$\lambda^m$是方程

$$y(M)=\mu\int_D K_m(M,N)y(N)dN \tag{5.11}$$

的特征值。反之，如果$\mu$是方程（5.11）的特征值，则$\lambda=\sqrt[m]{\mu}$中至少有一个是方程(5.10)的特征值。$K_m(M,N)$是连续核，它有有限个特征值，奇性核$K(M,N)$的特征值也可作同样的断定。

由于$K_m(M,N)$是连续核，于是它有预解核

$$\begin{aligned}R_m(M,N;\lambda)=K_m(M,N)&+\mu K_{2m}(M,N)\\&+\mu^2K_{3m}(M,N)+\cdots\end{aligned}$$

可以证明，奇性核$K(M,N)$的预解核是

$$\begin{aligned}R(M,N;\lambda)=H(M,N;\lambda)&+\lambda^{m-1}R_m(M,N;\lambda^m)\\&+\lambda^m\int_D H(M,P;\lambda)R_m(P,N;\lambda^m)\,dP\end{aligned}$$

其中

$$H(M,N;\lambda)=K(M,N)+\lambda K_2(M,N)+\cdots$$
$$+\lambda^{m-2}K_{m-1}(M,N)$$

## §5.3 弱奇性Hermite核

前面已讨论了奇性核和连续核有着完全相同的理论。这里我们可以看到弱奇性Hermite核和连续的Hermite核也有着完全一致的结果。

我们考察一维的弱奇性Hermite核

$$K(s,t)=\frac{L(s,t)}{|s-t|^{\alpha}}\qquad\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)\tag{5.12}$$

其中$L(s,t)$是连续的Hermite核。

首先，我们看迭核的连续性。引进连继续核

$$K_{\delta}(s,t)=\begin{cases}K(s,t) & |s-t|\geqslant\delta\\ \dfrac{L(s,t)}{\delta^{\alpha}} & |s-t|<\delta\end{cases}\tag{5.13}$$

则有如下估计

$$|K_{\delta}(s,t)|\leqslant|K(s,t)|\leqslant\frac{C}{|s-t|^{\alpha}}\tag{5.14}$$

作函数

$$K_2^{\delta}(s,t)=\int_a^b K_{\delta}(s,t_1)K_{\delta}(t_1,t)dt_1\tag{5.15}$$

它是连续的。只须证明：当$\delta\to0$时，$K_2^{\delta}(s,t)$一致收敛于$K_2(s,t)$。

我们来看差

$$K_2(s,t)-K_2^{\delta}(s,t)=\int_a^b(K(s,t_1)K(t_1,t)$$
$$-K_{\delta}(s,t_1)K_{\delta}(t_1,t))dt_1$$

当$|s-t_1|\geqslant\delta$及$|t-t_1|\geqslant\delta$时，右端为零。因此

$$
\begin{aligned}
&|K_2(s,t)-K_2^\delta(s,t)| \\
&\leqslant 2C^2\left[\int_{s-\delta}^{s+\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\right. \\
&\quad\left.+\int_{t-\delta}^{t+\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\right] \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

如果$|s-t|\geqslant 2\delta$，则$[s-\delta,s+\delta]$和$[t-\delta,t-\delta]$彼此不复盖，且

$$
\begin{aligned}
&\int_{s-\delta}^{s+\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\leqslant\int_{s-\delta}^{s+\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha\delta^\alpha} \\
&=\frac{1}{\delta^\alpha}\left[\int_s^{s+\delta}\frac{dt_1}{(t_1-s)^\alpha}+\int_{s-\delta}^{s}\frac{dt_1}{(s-t_1)^\alpha}\right]\leqslant\frac{2\delta^{1-2\alpha}}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

因此

$$
|K_2(s,t)-K_2^\delta\ (s,t)|\leqslant\frac{\delta C^2\delta^{1-2\alpha}}{1-\alpha}\quad(|s-t|\geqslant 2\delta) \tag{5.17}
$$

如果$|s-t|<2\delta$，则$[s-\delta,s+\delta]$和$[t-\delta,t+\delta]$有重叠的部分，但两个区间都包含在$[s-3\delta,s+3\delta]$或$[t-3\delta,t+3\delta]$内。由

$$
\frac{1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{|t_1-s|^{2\alpha}}+\frac{1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\right]
$$

得

$$
\begin{aligned}
&\int_{s-\delta}^{s+\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_{s-3\delta}^{s+3\delta}\frac{dt_1}{|t_1-s|^{2\alpha}}\right. \\
&\quad\left.+\int_{t-3\delta}^{t+3\delta}\frac{dt_1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\right]\leqslant\frac{2(3\delta)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}
\end{aligned}
$$

因此

$$|K_2(s,t)-K_2^\delta(s,t)|\leqslant\frac{\delta C^2}{1-2\alpha}(3\delta)^{1-2\alpha}$$

$$(|s-t|<2\delta)\qquad(5.18)$$

对照(5.18)和(5.17)，看出 $K_2^\delta(s,t)$是一致收敛于$K_2(s,t)$的，所以$K_2(s,t)$是连续的。

证明三次以上的迭核的连续性就容易了。

§4.1 中核$K(s,t)$为全连续的两个充分条件(4.14)和(4.15)，对于弱奇性核，(4.14)显然是成立的；至于(4.15)只要重复§5.1中的证明，把其中的不等式

$$|K(M',N)-K(M,N)|\leqslant|K(M',N)|+|K(M,N)|$$

换成下式即可，

$$|K(M',N)-K(M,N)|^2\leqslant\frac{1}{2}[|K(M',N)|^2+|K(M,N)|^2]$$

这样一来，弱奇性核也是全连续的。因此，对弱奇性Hermite核来说，特征值存在定理和 Hilbert-Schmidt 定理都是成立的。

由上面证明的迭核的连续性，可以知道 §4.5 关于迭核展开式的结论对弱奇性核也是正确的。

# 第六章　Cauchy奇异积分方程

这一章介绍一类与数学物理问题有较多联系的积分方程——**Cauchy 奇异积分方程**。对于这类积分方程，Fredholm定理不再成立。目前，这种方程的理论发展得比较完善。这里只就最简单的情况介绍一下主要的理论结果。

## §6.1　Cauchy积分主值

我们要用到一些复变函数知识。这里只是提到一些结果，其详细的叙述可以查阅参考文献〔8〕。

设$L$是复平面上的曲线，方程为

$$z(t)=x(t)+iy(t)\qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

如果函数$z(t)$满足条件

（1）　$z(t)$有连续导数$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$，并且$(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$；

（2）　对于任何两个异于$\alpha,\beta$的$t_1,t_2$，如果$t_1\neq t_2$，有$z(t_1)\neq z(t_2)$。

则称$L$为一**光滑曲线**。如果还有$z(\alpha)=z(\beta)$，则称为**光滑闭曲线**。

假设$L$是任意一条逐段光滑曲线，$\varphi(\zeta)$是沿$L$确定的连续函数。积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{6.1}$$

称为**Cauchy积分**。它对于每一个不在$L$上的点$z$都有一个确

定的值，并且当$D$为任一个不包含曲线$L$的单连通区域时，$\Phi(z)$在$D$内是解析的，导数为

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \tag{6.2}$$

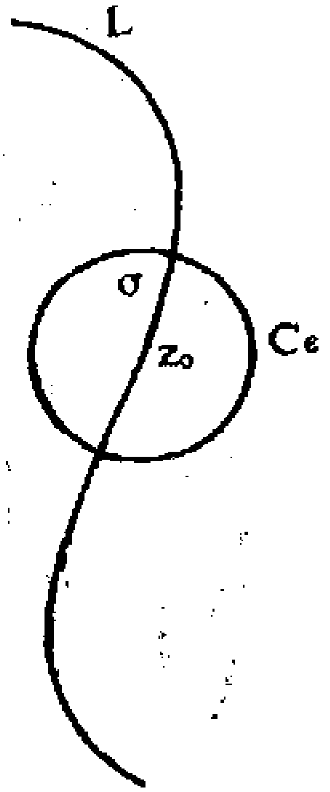



图 6—1

如果$L$是闭曲线，那末积分(6.1)在$L$的内部$D_+$确定一个解析函数$\Phi^+(z)$，同时在$L$的外部$D_-$也确定一个解析函数$\Phi^-(z)$。一般说来，这两个函数是不相同的。

现在，我们来讨论当$z_0$位于曲线$L$上的情况。这时，积分(6.1)一般是没有意义的。我们有必要确定积分(6.1)的意义。为此，以$z_0$为圆心，任意小的$\varepsilon$为半径作圆$C_\varepsilon$，这个圆截下包含$z_0$的那段$L$上的弦为$\sigma$见图(6—1)。这样，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-\sigma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \tag{6.3}$$

对于任何$\varepsilon>0$都是有意义的。如果当$\varepsilon\to0$时，积分(6.3)有极限，则称这个极限为积分(6.1)的**Cauchy 积分主值**或者**Cauchy奇异积分**。

假设$L$为一条逐段光滑的曲线，$\varphi(\zeta)$在$L$上确定，如果对于$L$上任意两点$\zeta_1$、$\zeta_2$，有

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|\leqslant K|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha$$

其中$K$、$\alpha$是正常数，则称$\varphi(\zeta)$满足指数为$\alpha$的**Hölder-Lipschitz条件**(简称H-L条件)。显然，如果$\alpha>1$，则$\varphi(\zeta)$在$L$上有导数$\varphi'(\zeta)\equiv0$，于是$\varphi(\zeta)$恒等于一个常数。因此，

我们总是假定$0<\alpha\leqslant 1$。另外，容易看出，如果$\varphi(\zeta)$在$L$上导数存在并且是有界的，则$\varphi(\xi)$是满足H-L条件的。反之却不然。

下面几个关于H-L条件的性质是很显然的，留给读者去验证。

（1） 如果$\varphi(\zeta)$满足指数为$\alpha$的H-L条件，则$|\varphi(\zeta)|$也是满足相同指数的H-L条件。

（2） 如果$\varphi_1(\zeta)$满足指数为$\alpha$的H-L条件，$\varphi_2(\zeta)$满足指数为$\beta$的H-L条件，则$\varphi_1(\zeta)\pm\varphi_2(\zeta)$满足指数为$\min(\alpha,\beta)$的H-L条件。

（3） 如果$\varphi(\zeta)$满足指数为$\alpha$的H-L条件，并且在$L$上处处不等于零，则$\dfrac{1}{\varphi(\zeta)}$满足相同指数的H-L条件。

（4） 如果曲线$L$包含在一个有界区域内，$\varphi(\zeta)$在$L$上满足指数为$\alpha$的H-L条件，则$\varphi(\zeta)$满足指数为任何$\beta(\leqslant\alpha)$的H-L条件。

函数$\varphi(\zeta)$满足H-L条件是积分(6.1)的积分主值存在的充分条件。

如果函数$\varphi(\zeta)$在光滑曲线$L$上确定，并且满足H-L条件

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|<K|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha}$$

其中$0<\alpha\leqslant 1$，$K$是正常数，$\zeta_1,\zeta_2$是$L$上任意两点，那末积分(6.1)的积分主值存在，并且满足指数为$\beta$的H-L条件。若$\alpha<1$，则$\beta=\alpha$；若$\alpha=1$，则$\beta<\alpha$。

## §6.2 Coxoцкий-Plemelj公式

在这一节，我们看看当$z$从闭曲线$L$的内部或外部趋于

$L$上的点$z_0$时，Cauchy积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (6.4)$$

的边界值(或称极限值)$\Phi^+(z_0)$，$\Phi^-(z_0)$，以及和Cauchy积分主值$\Phi(z_0)$的之间的关系。

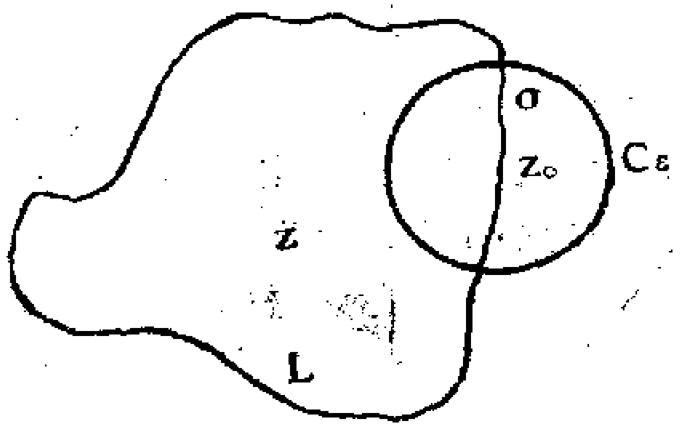



图 6—2

如果函数$\varphi(\zeta)$在曲线$L$上解析，$L$上任一点$z_0$的Cauchy积分(6.4)的边界值$\Phi^+(z_0)$、$\Phi^-(z_0)$都存在，并且在$L$上是解析的。实际上，条件可以放宽到$\varphi(\zeta)$满足H-L条件，而$\Phi^+(z_0)$、$\Phi^-(z_0)$也只是满足H-L条件。

我们只证明前一种情况。用圆$C_\varepsilon$上位于$L$外的一段弧$C_\varepsilon$和$L-\sigma$建立一个逐段光滑的闭曲线$\Gamma_\varepsilon$，对$\Gamma_\varepsilon$来说，$z_0$是内点(见图6—2)。

由于函数$\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$在闭曲线$L$与$\Gamma_\varepsilon$上，以及它们之间都是解析的，所以根据Cauchy定理，有

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-\sigma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

令$z\to z_0$，取极限，就得到

$$\Phi^+(z_0)=\lim_{z\to z_0}\Phi(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L-\sigma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta \qquad (6.5)$$

因此，$\Phi^+(z_0)$ 在闭曲线$L$上每点都存在并且在$L$上解析．

现在来求当 $\varepsilon\to 0$ 时，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

的极限．在这沿圆弧$C_\varepsilon$的积分中，令 $\zeta-z_0=\varepsilon e^{i\theta}$，则$d\zeta=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$。另外，假定$\varphi(\zeta)=\varphi(z_0)+\eta$，于是在$C_\varepsilon$上$\eta$的模与$\varepsilon$一起趋于零，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta_0)+\eta}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

$$= \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\int_{C_\varepsilon}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon}\eta d\theta$$

因为$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}d\theta=\pi$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\eta d\theta=0$，所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta = \frac{1}{2}\varphi(z_0) \qquad (6.6)$$

从(6.5)可以看出，这时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-\sigma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

也要趋于一个有限的极限，这就是积分(6.1)的积分主值。这里也证明了积分主值的存在性，但这里的条件要比上节末的条件更为严格，(6.5)式取极限，就成为

$$\Phi^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta + \frac{1}{2}\varphi(z_0) \qquad (6.7)$$

同样的道理，只要用圆$C_\varepsilon$在$L$内部的一段弧$C_\varepsilon$与$L-\sigma$封闭起来，就可以得到

$$\Phi^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta - \frac{1}{2}\varphi(z_0) \qquad (6.8)$$

公式(6.7)和(6.8)就是著名的Сохоцкий-Plemelj公式。它在一维Cauchy奇异积分方程理论中占着十分重要的地位。有时候，又写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = \frac{\Phi^+(z_0) + \Phi^-(z_0)}{2} \qquad (6.9)$$

$$\varphi(z_0) = \Phi^+(z_0) - \Phi^-(z_0) \qquad (6.10)$$

## §6.3 解析函数的边值问题

特征方程的求解问题可以归结到边值问题的处理。

如果函数$\Phi(z)$除了闭曲线$L$外，在全平面上定义，在$L$的内部$D_+$和外部$D_-$内解析，并且当$z$从$D_+$和$D_-$趋于曲线$L$的任一点$z_0$时，内外边界值$\Phi^+(z_0)$、$\Phi^-(z_0)$都存在，则称函数$\Phi(z)$是**分区解析的**。如果当$|z|$充分大时，分区解析函数$\Phi(z)$，有展开式

$$\Phi(z) = a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

则称$\Phi(z)$在无穷远处有有限阶（$k$阶）。

如果$\Phi(z)$在全平面上解析，并且在无穷远处是有限阶的，则$\Phi(z)$是$z$的多项式。事实上，$\Phi(z)$的展开式

$$\Phi(z) = a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

在全平面上成立。其中不应含有$z$的负次幂，因为$\Phi(z)$在$z=0$处也是解析的。这样必定有$k \geqslant 0$。当$k>0$时，$\Phi(z)$是$z$的多项式；当$K=0$时，$\phi(z)$是常数，当然，$\Phi(z)$可能恒为零，正象不等于零的常数一样，它的阶为零。

下面我们求解三个边值问题。

**问题Ⅰ** 求分区解析函数 $\Phi(z)$。使得它在无穷远处有有限阶，并且在闭曲线$L$上满足条件

$$\Phi^+(z_0)-\Phi^-(z_0)=f(z_0) \qquad (z_0\text{在}L\text{上}) \qquad (6.11)$$

其中$f(z)$是$L$上满足H-L条件的已知复函数。

从前两节可以看到，公式

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad (6.12)$$

确定了分别在$D_+$、$D_-$解析的函数$\Phi_0^+(z)$、$\Phi_0^-(z)$。并且由(6.10)知道，它们的边界值$\Omega_0^+(z_0)$和$\Phi_0^-(z_0)$是满足H-L条件和(6.11)的。因此，(6.12)确定的函数就是问题Ⅰ的解。显然，函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+P(z) \qquad (6.13)$$

也是问题Ⅰ的解。其中$P(z)$是任意多项式。

我们来证明问题Ⅰ的任何解$\Phi(z)$都可以表示成(6.13)的形式。由于$\Phi(z)$是问题Ⅰ的解，那末有

$$\Phi^+(z_0)-\Phi_0^+(z_0)=\Phi^-(z_0)-\Phi_0^-(z_0) \quad (z_0\text{在}L\text{上})$$

由复变函数论中的解析延拓定理，这两个差确定着同一个在全平面上解析的函数，并且在无穷远处它是有限阶的（阶为$k\geqslant0$）。因此，它是一个多项式$P(z)$。于是$\Phi(z)$可表为(6.13)的形式。

如果限定了$\Phi^-(\infty)=0$，则$P(z)\equiv0$。

**问题Ⅱ** （**Hilbert或Riemann齐次问题**） 求分区解析函数$\Phi(z)$，使得它在无穷远处有有限阶，在闭曲线$L$上满足条件

$$\Phi^+(z_0)=G(z_0)\Phi^-(z_0) \qquad (z_0\text{在}L\text{上}) \qquad (6.14)$$

其中$G(z)$是在$L$上满足H-L条件，并且不等于零的已知复

函数，称为这个问题的**系数**。整数

$$\chi=\chi(G(z_0))=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(z_0)]_L$$

称为这个问题的**指数**，其中$[\ ]_L$的意义是当$z_0$沿着$L$的正向（$L$所围的区域始终在前进方向的左侧）绕一周时，括号中函数的增量。

将(6.14)两边取对数，得

$$\ln\Phi^+(z_0)-\ln\Phi^-(z_0)=\ln G(z_0)$$

自然我们会想到用Cauchy型积分

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

来确定$\ln\Phi^+(z)$和$\ln\Phi^-(z)$。由于$\ln G(z_0)$可能是$L$上的多值函数，因此，直接用$\Gamma(z)$来求解是有困难的。下面分几种情况讨论。

（1） $\chi(G(z_0))=0$。这时，$\ln G(z)$是$L$上的单值函数，并且满足H-L条件，因而Cauchy型积分

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

定义了一个分区解析函数。令

$$\Phi(z)=Ae^{\Gamma(z)}$$

其中$A$为不等于零的任意常数。由 Сохоцкий-Plemelj 公式不难验证$\Phi(z)$是问题Ⅱ的一个解。

（2） $\chi(G(z_0))\neq 0$。这时不能直接由$\Gamma(z)$来求解，设$\Phi(z)$为问题Ⅱ的解，$a$为$D_+$中任一固定点。引入一个新的分区解析函数

$$\psi(z)=\begin{cases}\Phi(z) & z\text{ 在}D_+\text{中}\\(z-a)^{+\chi}\Phi(z) & z\text{ 在}D_-\text{中}\end{cases}\tag{6.15}$$

那末，由$\Phi(z)$满足(6.14)，得到$\psi(z)$满足

$$\psi^+(z_0)=G_0(z_0)\psi^-(z_0) \quad (z_0\text{在}L\text{上}) \tag{6.16}$$

其中$G_0(z_0)=(z_0-a)^{-\chi}G(z_0)$。容易验证，对于问题(6.16)的系数$G_0(z)$，有$\chi(\ln G_0(z_0))=0$。于是可由(1)求出它的一个解是

$$\psi(z)=Ae^{\Gamma(z)} \tag{6.17}$$

其中$A$为不等于零的任意常数，而

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(G_0(\zeta))}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln[(\zeta-a)^{-\chi}G(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta$$

将(6,17)代入(6,15)中，就得到问题Ⅱ的一个解

$$\Phi(z)=\begin{cases}Ae^{\Gamma(z)} & Z\text{在}D_+\text{中}\\ A(z-a)^{-\chi}e^{\Gamma(z)} & Z\text{在}D_-\text{中}\end{cases} \tag{6,18}$$

可以利用Сохоцкий-Plemelj公式直接验证(6,18)确实为问题Ⅱ的解。

这种解在解边值问题时具有特殊意义，我们称为边值问题的**典则解**。由$\Gamma(\infty)=0$，在(1)中可得到$\Phi(\infty)=A$；在(2)中可得到$\Phi(\infty)=A(z-a)^{-\chi}$。因此，$\Phi(z)$在无穷远处的阶都是$-\chi$。

下面我们来证明问题Ⅱ的任何解$\Phi(z)$都可以表示为

$$\Phi(z)=X(z)P(z) \tag{6,19}$$

其中$X(z)$是前面所述的典则解，$P(z)$是一个多项式。

事实上，设$\Phi(z)$是问题Ⅱ的解，则有

$$\Phi^+(z_0)=G(z_0)\Phi^-(z_0)$$

由于$X^+(z_0)=G(z_0)X^-(z_0)$，并且$X^+(z_0)$、$X^-(z_0)$在$L$

上处处不为零，因此

$$\frac{\Phi^+(z_0)}{X^+(z_0)}=\frac{\Phi^-(z_0)}{X^-(z_0)}\qquad (z_0\text{在}L\text{上})$$

由解析函线的延拓定理，函数$\frac{\Phi(z)}{X(z)}$在全平面解析，并且在无穷远处有有限阶，所以它是一个多项式$P(z)$，于是得到(6.19)。反之，(6.19)显然是问题Ⅱ的解。

对应边界条件

$$\Phi^+(z_0)=G^{-1}(z_0)\Phi^-(z_0)\qquad (z_0\text{在}L\text{上})$$

的边值问题称为边界问题Ⅱ**相联的**边值问题。如果$\Phi(z)$是(6.14)的典则解，则$\Phi^{-1}(z)$就是这个问题的典则解；同时，相联问题的指数为$\chi'=-\chi$，这里$\chi$是问题(6.14)的指数。

**问题Ⅲ(Hilbert或Riemann非齐次问题)** 求分区解析函数$\Phi(z)$，使得它在无穷远处有有限阶，在闭曲线$L$上满足条件

$$\Phi^+(z_0)=G(z_0)\Phi^-(z_0)+F(z_0)\quad (z_0\text{在}L\text{上})\quad (6.20)$$

其中$G(z)$，$F(z)$是在$L$上满足H-L条件的已知函数，并且$G(z)$在$L$上处处不为零。

同问题Ⅱ一样，函数$G(z)$和$\chi=\chi(G(z_0))=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(z_0)]_L$分别称为这个问题的系数和指数，函数$F(z)$称为自由项。

设$X(z)$为当$F(z)=0$的齐次问题的典则解，于是

$$G(z_0)=\frac{X^+(z_0)}{X^-(z_0)}$$

代入(6.20)，得到

$$\frac{\Phi^+(z_0)}{X^+(z_0)}-\frac{\Phi^-(z_0)}{X^-(z_0)}=\frac{F(z_0)}{X^+(z_0)}\qquad (6.21)$$

由问题I，得到分区解析函数

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(\zeta)}{X^{+}(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta$$

满足(6.23)。因此

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(\zeta)}{X^{+}(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta$$

是问题Ⅲ的一个解。利用齐次问题的一般解$X(z)P(z)$，可以类似地得到问题Ⅲ的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(\zeta)}{X^{+}(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta+X(z)P(z)$$

(6.22)

后面会看到边值问题的在无穷远处等于零的解有特别重要的意义。

在问题Ⅱ中，从(6.18)可以看出，$\chi\leqslant0$时，不存在在无穷远处等于零的解；$\chi>0$时，在无穷远处等于零的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_{\chi-1}(z)$$

其中$P_{\chi-1}(z)$是$\chi-1$阶多项式。

在问题Ⅲ中，从(6.22)可以看出，$\chi>0$时，一般解要在无穷远处等于零，(6.22)中的多项式$P(z)$应该是$\chi-1$阶的；$\chi=0$时，只有唯一的在无穷远处等于零的解

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{F(\zeta)}{X^{+}(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta$$

而$\chi<0$时，问题Ⅲ有在无穷远处等于零的解的充分必要条件是

$$\int_{L}\frac{F(\zeta)}{\chi^{+}(\zeta)}\zeta^{n}d\zeta=0\qquad(n=0,1,\cdots,-\chi-1)\quad(6.23)$$

当(6.23)成立时，问题Ⅲ有唯一解

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)}{X^+(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta$$

事实上，由于$X(z)$在无穷远处为$-\chi$阶，显然必须$P(z)=0$。另外(6.22)中的第一项不应含有$z^{-\chi-1}$，$z^{-\chi-2}$，…，$z^0$的各项，也就是说，在无穷远处，展开式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)}{X^+(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta=-\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)}{X^+(\zeta)}d\zeta$$

$$-\frac{z^{-2}}{2\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)\zeta}{X^+(\zeta)}d\zeta-\cdots$$

中不应含有$z^{-1}$，$z^{-2}$，…，$z^{\chi}$。于是充分必要条件为

$$\int_L\frac{F(\zeta)}{X^+(\zeta)}\zeta^n d\zeta=0\qquad(n=0,1,\cdots,-\chi-1)$$

还应指出，三种问题的解在曲线$L$上都是满足H-L条件的。读者可以自己验证。

## §6.4　第一种Cauchy奇异积分方程

有了前面的知识准备，我们可以求解Cauchy奇异积分方程了。先讨论**第一种Cauchy奇异积分方程**

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\tag{6.24}$$

其中$L$是光滑闭曲线，$f(z)$是已知函数，并且在$L$上满足H-L条件。未知函数$\varphi(\zeta)$，也假设为满足H-L条件。

由前面叙述的Сохоцкий-Plemelj公式(6.7)，可以得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\Phi^+(z)-\frac{1}{2}\varphi(z)$$

将右边再积分一次，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(z)-\frac{1}{2}\varphi(z)}{z-\eta}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(z)}{z-\eta}dz$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\varphi(z)}{z-\eta}dz \tag{6.25}$$

如果$\varphi(z)$在$D_+$解析，在$L$上 $\varphi^+(z)=\varphi(z)$。于是从(6.7)可以得到

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

所以 $$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

从而(6.25)中的第一项为$\frac{1}{2}\Phi^+(\eta)$，而第二项为$\frac{1}{2}\Phi^+(\eta)-\frac{1}{4}\varphi(\eta)$。故有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{z-\eta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]dz=\frac{1}{4}\varphi(\eta) \tag{6.26}$$

从这个式子，立即得出：函数

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(z)}{z-\eta}dz \tag{6.27}$$

满足第一种Cauchy奇异积分方程(6.24)。也不难看出，这方程的解是唯一的。事实上，如果$\varphi(\zeta)$是满足(6.24)的，将(6.24)两端乘以$\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{z-\zeta}$，再对$z$积分并考虑(6.26)，就得到(6.27)。也就是说，(6.24)的解的形式必定为(6.27)。

另外，应该指出，如果$f(z)$满足H-L条件，则由(6.27)立即推知：$\varphi(\zeta)$也是满足H-L条件的。

## §6.5 特 征 方 程

现在我们来讨论**第二种Cauchy奇异积分方程**

$$A(z)\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(z,\zeta)}{\zeta-z}\varphi(\zeta)d\zeta=f(z) \quad (6.28)$$

和它的**相联方程**

$$A(z)\psi(z)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(\zeta,z)}{\zeta-z}\psi(\zeta)d\zeta=g(z) \quad (6.29)$$

假定自由项$f(z)$, $g(z)$和已知函数 $A(z)$ 都是$L$上的满足H-L条件的。$K(z,\zeta)$的两个变量都是在$L$上取值，并且满足H-L条件。我们也限定在满足H-L条件的函数类中求解。

令 $B(z)=K(z,z)$

$$R(z,\zeta)=\frac{1}{\pi i}\frac{K(z,\zeta)-K(z,z)}{\zeta-z}$$

方程(6.28)可写成

$$A(z)\varphi(z)+\frac{B(z)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int_L R(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta$$

$$=f(z) \quad (6.30)$$

其中$B(z)$也是满足H-L条件的，而核 $R(z,\zeta)$ 最多也是一个奇性核。

对方程(6.30)进行定性研究时，起决定作用的是前两项。我们把方程

$$A(z)\varphi(z)+\frac{B(z)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z) \quad (6.31)$$

称为方程(6.30)或(6.28)的**特征方程**。类似地，(6.28)的相联方程(6.29)的特征方程可写成

$$A(z)\psi(z)-\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{B(\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=g(z) \tag{6.32}$$

它称为特征方程(6.31)的**相联方程**。

我们把特征方程(6.31)的求解问题化成解析函数的边值问题。假定

$$A(z)+B(z)\neq 0,\quad A(z)-B(z)\neq 0\quad (z\text{在}L\text{上})$$

引入函数

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\xi}d\zeta \tag{6.33}$$

由Сохоцкий-Plemelj公式，有

$$\varphi(z)=\Phi^{+}(z)-\Phi^{-}(z) \tag{6.34}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\Phi^{+}(z)+\Phi^{-}(z) \tag{6.35}$$

代入方程(6.31)，得

$$\Phi^{+}(z)=\frac{A(z)-B(z)}{A(z)+B(z)}\Phi^{-}(z)+\frac{f(z)}{A(z)+B(z)} \tag{6.36}$$

也就是函数$\Phi(\xi)$必须是边值问题(6.36)的解。反之，如果$\Phi(\xi)$是问题(6.36)的解，用(6.34)来确定$\varphi(z)$，从而$\Phi(\xi)$通过(6.33)用$\varphi(z)$来表示.因此，(6.34)、(6.35)成立，从中解得$\Phi^{+}(z)$、$\Phi^{-}(z)$，再代入(6.36)，就得到方程(6.31)。所以，特征方程(6.31)的求解与边值问题(6.36)的求解是等价的。

下面的工作只是引用§6.3的结论而已.边值问题(6.36)的指数为

$$\chi=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A(z)-B(z)}{A(z)+B(z)}\right]_{L}$$

设$\Phi_0(\xi)$是齐次边值问题

$$\Phi^+(z)=\frac{A(z)-B(z)}{A(z)+B(z)}\Phi^-(z)\qquad (z\text{ 在}L\text{上})$$

的典则解。

（1） $\chi>0$。这时有

$$\Phi(\xi)=\frac{\Phi_0(\xi)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{[A(\zeta)+B(\zeta)]\Phi_0^+(\zeta)(\zeta-\xi)}$$

$$+P_{\chi-1}(\xi)\Phi_0(\xi)$$

其中$P_{\chi-1}(\xi)$是$\chi-1$阶的任意多项式。

（2） $\chi=0$。上式中$P_{\chi-1}(\xi)=0$，即

$$\Phi(\xi)=\frac{\Phi_0(\xi)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{[A(\zeta)+B(\zeta)]\Phi_0^+(\zeta)(\zeta-\xi)}$$

（3） $\chi<0$。问题(6.36)有解的充分必要条件是

$$\int_L\frac{\zeta^n f(\zeta)d\zeta}{[A(\zeta)+B(\zeta)]\Phi_0^+(\zeta)}=0\quad (n=0,1,2,\cdots,-\chi-1)$$

并且当这些条件成立时，解由上式表达。

由此得方程(6.31)的解为

$$\varphi(z)=\frac{\Phi_0^+(z)+\Phi_0^-(z)}{2[A(z)+B(z)]\Phi_0^+(z)}f(z)$$

$$+\frac{\Phi_0^+(z)-\Phi_0^-(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{[A(\zeta)+B(\zeta)]\Phi_0^+(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta$$

$$+[\Phi_0^+(z)-\Phi_0^-(z)]P_{\chi-1}(z)\qquad(6.37)$$

推导中用到了Сохоцкий-Plemelj公式。

这样，当$f(\zeta)=0$时，立即得出齐次方程的解。当$\chi>0$时，解为

$$\varphi(z)=[\Phi_0^+(z)-\Phi_0^-(z)]P_{\chi-1}(z)\qquad(6.38)$$

当$\chi\leqslant 0$时，齐次方程只有零解。而第一种方程(6.24)只是这里取$A(z)=0$，$B(z)=1$而得到的特殊情形。

可以看出，这里的结果与通常 Fredholm 方程的结果是不同的。

下面再看与特征方程(6.31)相联的方程(6.32)。我们可以用和上面完全相同的办法证明解方程(6.32)与解满足边界条件

$$\psi^+(z)=\left[\frac{A(z)-B(z)}{A(z)+B(z)}\right]^{-1}\psi^-(z)+\frac{B(z)g(z)}{A(z)-B(z)}$$

$$(z\text{在}L\text{上})\qquad(6.39)$$

的解析函数边值问题是等价的。要注意的是，这里齐次边值问题的典则解就是前面的典则解$\Phi_0(\xi)$的倒数。

## §6.6 Noether 定理

这一节，我们将叙述Cauchy奇异积分方程

$$A(z)\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(z,\zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\qquad(6.40)$$

的可解性的几个基本定理。由于需要的准备知识较多，我们对结果不作证明。

假设方程(6.40)的特征部分为

$$A(z)\varphi(z)+\frac{B(z)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

其中系数$A(z)$、$B(z)$满足条件

$$A(z)+B(z)\neq0,\ A(z)-B(z)\neq0\qquad(z\text{在}L\text{上})$$

这个条件称为**正则可解性条件**。它是 Noether 定理成立的充分必要条件。

我们可以选一个特征部分为

$$A_1(z)\psi(z)+\frac{B_1(z)}{\pi i}\int_L\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{6.41}$$

的任何变换

$$A_1(z)\psi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_1(z,\zeta)\psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

其中$A_1(z)$、$B_1(z)$满足条件

$$A(z)B_1(z)+B(z)A_1(z)=0$$

将(6.40)的左端作为$\psi(z)$代入(6.41)中，即可得到一个第二种Fredholm方程。

**Bekya等价定理** 对于任何满足正则可解性条件的Cauchy奇异积分方程总存在一个在下述意义下等价的Fredholm方程。即两个方程同时可解或同时不可解，当它们可解时，可由其中任一方程的解求出另一方程的解。

这样，我们可把Cauchy奇异积分方程的问题归结到Fredholm方程。

再从Fredholm方程的讨论就得到下列Noether第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ定理。

**Noether Ⅰ定理** 齐次Cauchy奇异积分方程至多只有有限个线性无关解。

**Noether Ⅱ定理** Cauchy奇异积分方程(6.40)有解的充分必要条件是它的自由项$f(z)$满足条件

$$\int_L f(z)\psi_j(z)dz=0 \qquad (j=0,1,2,\cdots,p)$$

其中$\psi_j(z)$，$j=0,1,2,\cdots,p$是方程(6.40)相联齐次方程的所有线性无关解。

**Noether Ⅲ定理** Cauchy奇异积分方程的指数等于它的齐次方程的线性无关解的个数与相联齐次方程的线性无关

解的个数之差。

当然，这些定理都只是对 Cauchy 奇异积分方程进行定性研究，关于这个问题的详细内容可参看文献[6]。

## 习　　题

1． 利用 Сохоцкий-Plemelj 式证明 Cauchy 积分反演公式：如果

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}$$

则

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}$$

反之亦然。

2． 设$L$是以原点为圆心的单位圆，$\psi(\theta)$满足

$$\int_0^{2\pi}\psi(\theta)d\theta=0$$

试证明：

$$\varphi(\theta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}d\theta$$

是方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}d\theta=\psi(\theta_0)$$

满足条件

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=0$$

的解(Hildert 反演公式)。

3． 解特征方程

$$\frac{1}{2}(1+z^{\chi})\varphi(z)+\frac{1}{2}(1-z^{\chi})\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)$$

并证明：如果$\chi\geqslant0$，则方程可解，解为

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}(1+z^{\chi})f(z)+\frac{1}{2}(1-z^{-\chi})\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$+(1-z^{-\chi})P_{\chi-1}(z)$$

其中$P_{\chi-1}(z)$为阶不超过$\chi-1$的多项式，当$\chi-1<0$时，$P_{\chi-1}(z)=0$；如果$\chi<0$，则方程有解的充分必要条件为

$$\int_L\zeta^n f(\zeta)d\zeta=0\qquad(n=0,1,\cdots,-\chi-1)$$

# 参 考 文 献

〔1〕 С.Л.Соболев，数学物理方程，人民教育出版社，1958年。

〔2〕 R.Courant，D.Hilbert，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958年。

〔3〕 В.И.Смирнов，高等数学教程，第四卷第一分册，人民教育出版社，1958年。

〔4〕 Г.Е.Шилов，数学分析专门教程，人民教育出版社，1965年。

〔5〕 F.Riesz、B.Sz.-Nagy，泛函分析讲义，第二卷，科学出版社，1980年。

〔6〕 Н.И.Мусхелишвили，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966年。

〔7〕 И.П.Натансон，实变函数论，高等教育出版社，1956年。

〔8〕 И.И.Привалов，复变函数引论，人民教育出版社，1956年。